

Elementaire avondcursus 1952-1953

Analyse

door

Dr W. Peremans.

§1. Het getalbegrip.

In de analyse werken we met reële getallen. Deze worden verkregen door successievelijke uitbreiding van de verzameling der "gewone" natuurlijke getallen $1, 2, 3, \dots$. Deze worden, om de aftrekking onbeperkt mogelijk te maken, uitgebreid met de negatieve getallen en het getal nul tot de gehele getallen en vervolgens met de breuken tot de rationale getallen. Voor deze getallen gelden een aantal rekenregels, die we hier bekend zullen veronderstellen. We zullen er hieronder evenwel een aantal van opsommen.

(1.1) Bij ieder tweetal rationale getallen a en b is een som $a + b$ en een product ab gedefinieerd, dat aan de volgende eigenschappen voldoet.

(1.2) $a + b = b + a$ (commutatieve eigenschap van de optelling).

(1.3) $(a+b) + c = a + (b+c)$ (associatieve eigenschap van de optelling).

(1.4) $ab = ba$ (commutatieve eigenschap van de vermenigvuldiging).

(1.5) $(ab)c = a(bc)$ (associatieve eigenschap van de vermenigvuldiging).

(1.6) $a(b+c) = ab + ac$ (distributieve eigenschap van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling).

(1.7) Bij ieder tweetal rationale getallen a en b is er één en slechts één rationaal getal x te vinden, zodat $a + x = b$. We noemen dit getal x het verschil $b - a$. Verder heet $a - a = 0$ (nul) en $0 - a = -a$.

Er geldt dus

(1.8) $a + (b-a) = b$.

(1.9) Uit $a + b = a + c$ volgt $b = c$.

Verder geldt

(1.10) $0 + a = a$.

(1.11) $0a = 0$.

(1.12) $1a = a$.

(1.13) $a(-b) = -ab$.

(1.14) Uit $ab = 0$ volgt $a = 0$ of $b = 0$.

Opgave 1. Bewijs met behulp van bovenstaande rekenregels, dat $a + (-b) = a - b$ en $(a-b)c = ac - bc$.

(1.15) Bij ieder tweetal rationale getallen $a \neq 0$ en b is er één en slechts één rationaal getal x te vinden zodat $ax = b$. We noemen dit getal x het quotiënt $\frac{b}{a}$.

Er geldt dus

$$(1.16) \quad a \frac{b}{a} = b.$$

$$(1.17) \quad \text{Uit } ab = ac \text{ en } a \neq 0 \text{ volgt } b = c.$$

Het feit, dat voor de rationale getallen bovenstaande rekenregels gelden, drukt men uit door te zeggen dat de rationale getallen een lichaam vormen.

(1.18) Voor ieder tweetal rationale getallen a en b geldt één en slechts één van de volgende drie betrekkingen $a = b$, $a < b$, $b < a$. In plaats van $a < b$ schrijft men ook $b > a$.

Hiervoor geldt:

$$(1.19) \quad \text{Uit } a < b \text{ en } b < c \text{ volgt } a < c.$$

$$(1.20) \quad \text{Uit } a < b \text{ volgt } a + c < b + c.$$

$$(1.21) \quad \text{Uit } a < b \text{ en } c > 0 \text{ volgt } ac < bc.$$

$$(1.22) \quad \text{Uit } a < b \text{ en } c < 0 \text{ volgt } ac > bc.$$

In plaats van " $a < b$ of $a = b$ " schrijven we $a \leq b$ en analoog $a \geq b$.

(1.23) Ieder rationaal getal is (op meer dan één manier) te schrijven als het quotiënt van twee gehele getallen, genaamd een breuk: $a = \frac{m}{n}$ (m heet de teller, n de noemer van de breuk; de noemer is $\neq 0$). Dan en slechts dan is $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, als $mn' = nm'$.

De som, het verschil en het product van twee breuken zijn als volgt te bepalen:

$$(1.24) \quad \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + nm'}{nn'},$$

$$(1.25) \quad \frac{m}{n} - \frac{m'}{n'} = \frac{mn' - nm'}{nn'},$$

$$(1.26) \quad \frac{m}{n} \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}.$$

(1.27) Onder de breuken, die een rationaal getal voorstellen is er één en slechts één te vinden met kleinste positieve noemer, die we de standaardschrijfwijze van het rationale getal of ook wel een onvereenvoudigbare breuk noemen.

(1.28) Er is bij ieder rationaal getal a een geheel getal q te vinden, zodat $q \leq a < q + 1$.

We kunnen deze ~~bewering~~ in een nog iets andere vorm brengen. Uit $q \leq a < q + 1$ volgt $0 \leq a - q < 1$. Schrijven we a als een breuk $\frac{m}{n}$, dan is $0 \leq m - qn < n$. Dit levert ons het proces van deling met rest voor gehele getallen:

(1.29) Als m en n gehele getallen zijn en $n \neq 0$, dan zijn er gehele getallen q en r te vinden, zodat $m = qn + r$ en $0 \leq r < n$.

Als m en n gehele getallen zijn, geldt:

(1.30) Uit $m < n$ volgt $m + 1 \leq n$ en omgekeerd,

(1.31) uit $m \leq n$ volgt $m < n + 1$ en omgekeerd.

De gehele getallen > 0 zijn de natuurlijke getallen. Deze ontstaan uit het getal 1 door er successievelijk 1 bij op te tellen. Een eigenschap van natuurlijke getallen kan men bewijzen door volledige inductie:
 (1.32) Als een eigenschap geldt voor het getal 1 en uit haar geldigheid voor een willekeurig natuurlijk getal n die voor $n + 1$ volgt, dan geldt zij voor alle natuurlijke getallen.

Voor de som van een aantal getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ gebruiken we het symbool $\sum_{k=1}^n a_k$; voor het product van deze getallen het symbool $\prod_{k=1}^n a_k$. Er geldt dus:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 a_k &= a_1, & \prod_{k=1}^1 a_k &= a_1, \\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k &= \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}, & \prod_{k=1}^{n+1} a_k &= \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) a_{n+1}. \end{aligned}$$

Door deze twee regels is de betekenis van $\sum_{k=1}^n a_k$ resp. $\prod_{k=1}^n a_k$ door volledige inductie geheel vastgelegd.

Opgave 2. Bewijs met volledige inductie dat $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ en $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Het product van n gelijke getallen a heet de n^e macht van a : a^n .
 $= \prod_{k=1}^n a$. Voor deze machten gelden de volgende eigenschappen:

$$(1.33) \quad a^m a^n = a^{m+n},$$

$$(1.34) \quad a^m b^m = (ab)^m,$$

$$(1.35) \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

De rationale getallen vertonen echter nog tekortkomingen, waarvan we er nu één zullen behandelen:

(1.36) Er is geen rationaal getal x , waarvoor geldt $x^2 = 2$.

Bewijs: Omdat $x^2 = (-x)^2$ is het voldoende te bewijzen, dat er geen positief rationaal getal x is waarvoor geldt $x^2 = 2$. Als er wel zo'n getal is, is er onder alle positieve breuken met kwadraat 2 één met kleinste positieve noemer. Laat deze $\frac{m}{n}$ zijn, dan is $\frac{m^2}{n^2} = 2$, dus $m^2 = 2n^2$. Blijkbaar is $1 < \frac{m}{n} < 2$, dus $n < m < 2n$. Het kwadraat $\frac{2n-m}{m-n}$ van de breuk $\frac{2n-m}{m-n}$ is

$\frac{4n^2 - 4nm + m^2}{m^2 - 2mn + n^2} = \frac{6n^2 - 4nm}{3n^2 - 2mn} = 2$, maar $\frac{2n-m}{m-n}$ is een positieve breuk met positieve noemer $m-n < n$. Dit geeft een tegenstrijdigheid, dus er is geen rationale x met $x^2 = 2$.

We kunnen nu echter de rationale getallen in twee klassen verdelen; de ene klasse L bestaat uit de negatieve getallen en de getallen ≥ 0 , waarvan het kwadraat < 2 is de andere R uit de positieve getallen waarvan het

kwadraat > 2 is. Als $x \geq 0$, $x^2 < 2$, $y \geq 0$, $y^2 > 2$, dan is $x < y$. (Als n.l. $x \geq y$ was, was $x^2 \geq xy \geq y^2$, maar $x^2 < y^2$.) De getallen van L zijn dus kleiner dan die van R. De moeilijkheid is nu, dat er geen rationaal getal op de grens van deze klassen ligt (van zo'n getal zou het kwadraat 2 moeten zijn). Nu is het mogelijk om, op een hier niet nader te bespreken wijze, de verzameling der rationale getallen uit te breiden tot die der reële getallen, waarin de hierboven genoemde bezwaren opgeheven zijn. In het bijzonder geldt dat, als de verzameling der reële getallen verdeeld wordt in twee klassen L en R, dusdanig, dat ieder reëel getal hetzij in L, hetzij in R ligt (en niet in beide) en dusdanig, dat ieder getal in L kleiner is dan ieder getal in R, er dan geldt dat hetzij L een grootste hetzij R een kleinste getal bezit, d.w.z. een getal in L (resp. R) dat groter (resp. kleiner) is dan alle andere getallen in L (resp. R). Verder blijven alle hierboven gegeven rekenregels voor rationale getallen (nummers (1.1) t.e.m. (1.22), (1.28), (1.33), (1.34), (1.35)), behalve die over het schrijven als een breuk (nummers (1.23) t.e.m. (1.27)) ook voor reële getallen geldig.

We kunnen een reëel getal ook nog anders tot stand brengen. Denken we ons een reëel getal bepaald door een klassenpaar L en R. We bekijken eerst welke gehele getallen in L en welke in R liggen. Laat b.v. 6 (en dus ook alle kleinere getallen) in L en 7 (en dus ook alle grotere getallen) in R liggen. We beschouwen nu de getallen 6,1; 6,2; ...; 6,9 en kijken weer welke in L en welke in R liggen. Laat b.v. 6,3 (en dus 6,1 en 6,2) in L liggen en 6,4 (en dus 6,5 t.e.m. 6,9) in R liggen. Dan gaan we verder met 6,31 t.e.m. 6,39 enz. Zo sluiten we het reële getal a steeds verder in:

$$\begin{aligned} 6 &< a < 7 \\ 6,3 &< a < 6,4 \\ 6,37 &< a < 6,38 \\ &\vdots \end{aligned}$$

We kunnen dan a schrijven als een oneindig voortlopende tiendelige breuk 6,37 Elk volgend cijfer van de breuk maakt de grenzen, waartussen het getal moet liggen, nauwer. Voor het getal dat als kwadraat 2 heeft, kunnen we zo ook vinden: 1,41... .

Als we over "een verzameling reële getallen" spreken, bedoelen we daarmee een verzameling, die uit reële getallen bestaat, b.v. de reële getallen ≤ 2 of de reële getallen in welke decimaalbreukontwikkeling ergens een 3 optreedt. Het is niet te verwarren met "de verzameling der reële getallen", d.i. de verzameling van alle reële getallen.

Een verzameling V reële getallen heet naar boven begrensd (resp. naar beneden begrensd) als er een reëel getal C bestaat zodat voor ieder

getal x uit V geldt $x \leq C$ (resp. $x \geq C$). Het getal C heet dan een boven-grens (resp. ondergrens) van V . Als V zowel naar boven als naar beneden begrensd is (in de twee gevallen natuurlijk met verschillende C), heet V begrensd.

De verzameling der reële getallen ≤ 2 is wel naar boven, maar niet naar beneden begrensd; de verzameling der reële getallen in welke decimaalbreukontwikkeling ergens een 3 optreedt is noch naar boven noch naar beneden begrensd.

Als V een naar boven (resp. beneden) begrensde verzameling reële getallen is, heet het getal a de bovenste grens (resp. onderste grens) van V als a bovengrens (resp. ondergrens) is, maar ieder reëel getal $< a$ niet; m.a.w. als a de kleinste bovengrens (resp. grootste ondergrens) is. Het is duidelijk, dat er slechts één getal a bovenste grens (resp. onderste grens) van V kan zijn (let op het verschil in lidwoord in de definities van bovengrens en bovenste grens). A priori is het echter niet duidelijk, dat bij iedere naar boven begrensde verzameling ook inderdaad een bovenste grens bestaat. Dit is echter wel het geval:
(1.37) (Stelling van de bovenste grens). Iedere naar boven begrensde verzameling reële getallen heeft een bovenste grens.

Doordat wij de invoering der reële getallen hier niet in details hebben uitgevoerd, missen wij de basis om het bewijs van deze stelling te leveren. We zullen deze fundamentele stelling dus zonder bewijs moeten aanvaarden. Het spreekt vanzelf dat er ook een met (1.37) overeenkomende stelling van de onderste grens is.

Als voorbeeld hoe men stellingen over reële getallen met behulp van de stelling van de bovenste grens kan bewijzen, geven we het bewijs van de volgende stelling.

(1.38) Bij ieder positief reëel getal a is een positief reëel getal b te vinden, zodat $b^2 = a$.

Bewijs: Stel eerst $a < 1$. Neem de verzameling V der positieve reële getallen waarvan het kwadraat $\leq a$ is. V is naar boven begrensd, want $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 > a$ en als $x^2 \leq a$ dan is $x^2 < (a+1)^2$ dus $x < a + 1$ (uit $x \geq a + 1$ zou volgen $x^2 \geq (a+1)x \geq (a+1)^2$). V heeft dus een bovenste grens b . We bewijzen nu dat $b^2 = a$. We noemen $d = \frac{a+b}{1+b}$. Stel nu $b^2 > a$ (resp. $b^2 < a$), dan is $d < b$ (resp. $d > b$) en $d^2 > a$ (resp. $d^2 < a$).

Opgave 3. Bewijs de vorige zin (uit het ongerijmde).

Als nu $b^2 > a$ is, is, omdat $d < b$ is, d geen bovengrens van V , dus er is een $x > d$ met $x^2 \leq a$; uit $a < x$ volgt $d^2 < x^2$, dus $d^2 < a$, maar we weten dat $d^2 > a$ — hetgeen een tegenstrijdigheid levert, dus $b^2 \leq a$. Als $b^2 < a$, dan is $d > b$ en $d^2 < a$, hetgeen direct in strijd is met het feit dat b bovengrens van V is. Dus $b^2 = a$. Als $a > 1$, dan is $\frac{1}{a} < 1$. Op $\frac{1}{a}$ mogen

we de stelling dus al toepassen; er is dus een c met $c^2 = \frac{1}{a}$. Kiezen wij nu $b = \frac{1}{c}$ dan is $b^2 = \frac{1}{c^2} = a$. Als $a = 1$, dan kunnen wij $b = 1$ kiezen. Nu is (1.38) volledig bewezen.

Het spreekt vanzelf dat er niet meer dan één positief getal kan zijn, waarvan het kwadraat a is, want als $x^2 = a$, $y^2 = a$, $x > 0$, $y > 0$, dan is $x^2 = y^2$, $0 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Uit $x > 0$, $y > 0$ volgt $x+y > 0$, dus $x+y \neq 0$, dus $x-y = 0$, $x = y$. Het volkomen bepaalde positieve reële getal b uit stelling (1.38) noemen wij $\sqrt{a}$. Verder stellen wij $\sqrt{0} = 0$.

We zien hieraan, dat in tegenstelling tot hetgeen bij de rationale getallen het geval was nu $x^2 = 2$ wel een positieve oplossing bezit. Het getal $\sqrt{2}$ is dus een reëel getal, dat niet rationaal is; zulke getallen heten irrationale getallen.

Als α een irrationaal getal is en a, b, c, d zijn rationale getallen dan volgt uit $a+b\alpha = c+d\alpha$, dat $a = c$, $b = d$. Was nl. $b \neq d$, dan was $\alpha = \frac{a-c}{d-b}$ en dus α rationaal, dus $b = d$ en dan ook $a = c$.

Men zegt dat het reële getal c tussen de reële getallen a en b ligt als $a < c < b$ of $b < c < a$ geldt. In ieder geval is dan dus $a \neq b$.

(1.39) Tussen twee verschillende reële getallen ligt een rationaal getal.

Bewijs: Laat de gegeven getallen a en b zijn en $a < b$. Volgens (1.28) voor reële getallen is er dan een geheel getal n zodat $n-1 \leq \frac{1}{b-a} < n$. Omdat $b - a > 0$ volgt hieruit $b - a > \frac{1}{n} > 0$. Nogmaals volgens (1.28) voor reële getallen is er een geheel getal k zodat $k-1 \leq (n+1)a < k$, dus $a < \frac{k}{n+1}$ en $a - \frac{k}{n+1} \geq -\frac{1}{n+1}$. Voor het rationale getal $c = \frac{k}{n+1}$ geldt dan $a < c$ en $b - c = b - a + a - \frac{k}{n+1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$, dus $a < c < b$, dus c ligt tussen a en b .

(1.40) Tussen twee verschillende reële getallen ligt een irrationaal getal.

Bewijs: Laat weer de gegeven getallen a en b zijn en $a < b$. Dan is $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$. Volgens (1.39) is er een rationaal getal d zodat $a - \sqrt{2} < d < b - \sqrt{2}$. Dan is, als $c = d + \sqrt{2}$, $a < c < b$. Was c rationaal dan was ook $c-d = \sqrt{2}$ rationaal, hetgeen niet het geval is. Dus c is irrationaal en ligt tussen a en b .

Men drukt hetgeen in (1.39) (resp. (1.40)) gezegd wordt, ook wel uit door te zeggen dat de rationale getallen (resp. de irrationale getallen) overal dicht liggen in de verzameling der reële getallen.

We definiëren de absolute waarde of modulus $|a|$ van een reëel getal a als volgt:

$$|a| = a \quad \text{als} \quad a \geq 0,$$

$$|a| = -a \quad \text{als} \quad a < 0.$$

Er geldt dan:

$$(1.41) \quad |-a| = |a|.$$

(1.42) $|a| > 0$ als $a \neq 0$, $|0| = 0$.

(1.43) $|ab| = |a||b|$.

(1.44) $|a+b| \leq |a|+|b|$ (driehoeksongelijkheid).

We geven hier het bewijs van (1.44). We onderscheiden vier gevallen:

1°. $a \geq 0$, $b \geq 0$. Dan is $a+b \geq 0$, $|a+b| = a+b = |a|+|b|$.

2°. $a < 0$, $b < 0$. Dan is $a+b < 0$, $|a+b| = -(a+b) = -a-b = |a|+|b|$.

3°. $a \geq 0$, $b < 0$. Dan is $a+b < a+b - 2b = a-b = |a|+|b|$ en $-(a+b) = -a-b \leq 2a-a-b = a-b = |a|+|b|$. Daar in ieder geval $|a+b| = a+b$ of $-(a+b)$, geldt ook $|a+b| \leq |a|+|b|$.

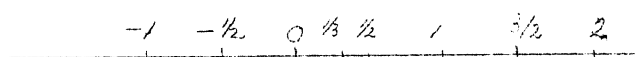
4°. $a < 0$, $b \geq 0$. Analoog als 3°.

Opgave 3. Bewijs (1.41), (1.42) en (1.43).

Opgave 4. Bewijs $||a| - |b|| \leq |a-b|$. (Aanwijzing: maak gebruik van (1.44).)

De naam "driehoeksongelijkheid" wordt pas begrijpelijk bij de complexe getallen; daar geeft deze n.l. juist de stelling dat een zijde van een driehoek kleiner is dan de som van de andere zijden.

Men geeft van de reële getallen een meetkundige voorstelling door de



punten van een rechte lijn. Op een rechte lijn kiest men een punt, dat men 0 noemt en een daarvan verschillend punt, dat

men 1 noemt. Door het lijnstuk 01 verschillende malen achter elkaar naar beide zijden van 0 af te passen verkrijgt men de punten 1, 2, 3... en -1, -2, -3,... Door $\frac{1}{n}$ van het lijnstuk 01 te nemen en dit uit 0 achter elkaar af te passen krijgt men alle breuken met noemer n. Verdeelt men de rationale getallen in twee klassen L en R als hierboven beschreven, dan



geeft het reële getal dat hierdoor bepaald is op de rechte juist het punt dat op de grens ligt van de door L en R op de

lijn bepaalde puntverzamelingen.

We definiëren nu nog machten met gehele exponenten en wel voor grondtallen $\neq 0$ door: $a^0 = 1$ en voor een natuurlijk getal n: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Opgave 5. Bewijs, dat (1.33), (1.34) en (1.35) ook voor gehele exponenten geldig blijven.

§ 2. Oneindige rijen. Convergentie.

Als men aan ieder natuurlijk getal een reëel getal toevoegt ontstaat een (oneindige) rij reële getallen. Men kan zich de rij opgeschreven denken door eerst het getal dat aan 1 is toegevoegd (het eerste element van de rij) op te schrijven, daarnaast het element dat aan 2 is toege-

voegd (het tweede element van de rij) enz. Uiteraard kan men de rij nooit helemaal in werkelijkheid op deze wijze opschrijven. Men duidt een rij in het algemeen wel aan met een letter waaraan een natuurlijk getal als index is gehangen. Zo is a_n het n^{e} element van de rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ en b_7 het zevende element van de rij $b_1, b_2, b_3, \dots$. Een rij wordt gegeven door een voorschrift dat het mogelijk maakt ieder element ervan te bepalen. Zo'n voorschrift is b.v. $a_n = \frac{1}{n}$ of $a_n = 3a_{n-1}^2, a_1 = 1$. In het laatste geval wordt het n^{e} element van de rij niet rechtstreeks gegeven, maar een voorschrift om het uit voorafgaande elementen van de rij te berekenen. We zullen, als geen misverstand te duchten is, een verkorte zegswijze invoeren en b.v. in plaats van over "de rij a_n , bepaald door het voorschrift $a_n = \frac{1}{n}$ " wel spreken over "de rij $a_n = \frac{1}{n}$ " of nog korter over "de rij $\frac{1}{n}$ ".

Opgave 6. Bepaal het zesde element van: 1° de rij $2n+1$; 2° de rij $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_1 = 1, a_2 = 2$; 3° $a_{2n} = \frac{1}{n^2}, a_{2n-1} = -\frac{1}{(n+1)^3}$; 4° $a_n = 4$; 5° $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, waarin a_n door 2° bepaald is.

Een rij a_n heet begrensd, als er een reëel getal c bestaat zodat voor alle natuurlijke n geldt $|a_n| \leq c$.

Opgave 7. Welke van de in opgave 6 opgesomde rijen zijn begrensd?

Een rij a_n heet convergent met limiet a , als er bij ieder positief reëel getal ε een natuurlijk getal N te vinden is, zodat voor alle natuurlijke getallen $n > N$ geldt $|a - a_n| < \varepsilon$. Men schrijft dit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

In plaats van "een rij is convergent (met limiet a)" zegt men ook wel "een rij convergeert (naar a)".

Het getal N in de convergentiedefinitie is afhankelijk van de keuze van ε ; men duidt dit wel aan door er $N(\varepsilon)$ voor te schrijven.

(2.1) Een convergente rij heeft niet meer dan één limiet.

Bewijs: Stel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b, a \neq b$. Dan is $|a-b| > 0$ en er is een $N_1(\frac{1}{2}|a-b|)$, zodat voor $n > N_1$ geldt $|a - a_n| < \frac{1}{2}|a-b|$ en een $N_2(\frac{1}{2}|a-b|)$, zodat voor $n > N_2$ geldt $|b - a_n| < \frac{1}{2}|a-b|$. Noem de grootste van N_1 en N_2 nu N (schrijfwijze: $N = \max(N_1, N_2)$) dan is voor $n > N$ zowel $|a - a_n| < \frac{1}{2}|a-b|$ als $|b - a_n| < \frac{1}{2}|a-b|$. Dan is $|a-b| = |a - a_{N+1} + a_{N+1} - b| \leq |a - a_{N+1}| + |a_{N+1} - b| < \frac{1}{2}|a-b| + \frac{1}{2}|a-b| = |a-b|$; dit geeft echter een tegenstrijdigheid, dus $a \neq b$ is onmogelijk, dus $a = b$.

Opgave 8. Ga na of de volgende rijen convergent zijn en zo ja met welke limiet: 1° $a_n = \frac{1}{n}$; 2° $a_n = 2^{-n}$ (bewijs eerst $2^n \geq n+1$); 3° $a_n = a$; 4° $a_n = (-2)^{-n}$; 5° $a_{2n-1} = 0, a_{2n} = 2^{-n}$; 6° $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = 2^{-n}$; 7° $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = \frac{n-1}{n}$.

We gaan nu een belangrijke voorwaarde voor convergentie (een z.g.

convergentiekenmerk of convergentiecriterium) van een rij afleiden. Hiertoe eerst een definitie.

Een rij a_n heet een fundamenteaalrij, als er bij ieder positief reëel getal ε een natuurlijk getal N te vinden is, zodat voor alle natuurlijke getallen $m > N$ en $n > N$ geldt $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Globaal gezegd is een convergente rij een rij, waarvan de elementen op den duur willekeurig dicht bij hun limiet komen te liggen en een fundamenteaalrij een rij waarvan de elementen op den duur willekeurig dicht bij elkaar komen te liggen.

We bewijzen nu eerst een hulpstelling:

(2.2) Een fundamenteaalrij is begrensd.

Bewijs: Laat a_n een fundamenteaalrij zijn. Dan is er een $N(1)$ te vinden zodat voor $m > N$ geldt $|a_m - a_{N+1}| < 1$, dus $|a_m| = |a_m - a_{N+1} + a_{N+1}| \leq |a_m - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < |a_{N+1}| + 1$. De verzameling der getallen $a_1, a_2, \dots, a_N$ is natuurlijk begrensd: $|a_n| \leq C_1$ voor $n \leq N$. Noemen we nu $C = \max(C_1, |a_{N+1}| + 1)$ dan is $|a_n| \leq C$ voor alle n .

(2.3) (Convergentiecriterium van Cauchy) Een fundamenteaalrij is convergent.

Bewijs: Laat a_n een fundamenteaalrij zijn. Beschouw de verzameling V bestaande uit die reële getallen x waarvoor geldt: er is een natuurlijk getal N zodat voor alle natuurlijke getallen $n > N$ geldt $a_n \geq x$ (deze N mag voor verschillende x verschillend zijn). Nu is a_n begrensd: $|a_n| \leq C$. In ieder geval ligt $-C$ in V want $a_n \geq -C$ voor alle n , dus V is werkelijk een verzameling. Verder is V naar boven begrensd, want voor $x > C$ geldt $a_n < x$ voor alle n , dus x ligt dan niet in V , dus C is een bovengrens van V . Laat a de bovenste grens van V zijn (schrijfwijze $a = \sup V$). Kies een $\varepsilon > 0$, dan is $a - \varepsilon$ geen bovengrens van V , dus er is een y in V zodat $y > a - \varepsilon$. Er is dan een N_1 zodat voor $n > N_1$ geldt $a_n \geq y$, dus $a_n > a - \varepsilon$, dus $a - a_n < \varepsilon$. Omdat a_n een fundamenteaalrij is is er een $N_2(\frac{\varepsilon}{2})$ te vinden zodat voor $m > N_2$, $n > N_2$ geldt $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Omdat a een bovengrens van V is, ligt $a + \frac{\varepsilon}{2}$ niet in V en dus is er een $M > N_2$ zodat $a_M < a + \frac{\varepsilon}{2}$. Voor $n > N_2$ is dan $a - a_n = a - a_M + a_M - a_n > -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon$. Noemen wij $N = \max(N_1, N_2)$ dan geldt voor $n > N$ dat $-\varepsilon < a - a_n < \varepsilon$, dus $|a - a_n| < \varepsilon$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$; a_n is convergent.

Het omgekeerde van (2.3) is veel eenvoudiger:

(2.4) Een convergente rij is een fundamenteaalrij.

Bewijs: Laat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ zijn. Neem een $\varepsilon > 0$, dan is er een $N(\frac{\varepsilon}{2})$, zodat voor $n > N$ geldt $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Als dan $m > N$ en $n > N$, dan is $|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a - a_m| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dus is a_n een fundamenteaalrij.

Uit (2.2) en (2.4) volg direct

(2.5) Een convergente rij is begrensd.

Het voordeel van het criterium van Cauchy is, dat in de definitie van fundamentealrij de limiet van de rij niet voorkomt en dat men dus om aan te tonen dat een rij een fundamentealrij is de limiet van die rij niet hoeft te kennen.

We brengen het limietbegrip nu in verband met de vier hoofdbeweringen en de ordening.

Als a_n en b_n rijen zijn dan heet de rij c_n gedefinieerd door $c_n = a_n + b_n$, resp. $a_n - b_n$, $a_n b_n$, $\frac{a_n}{b_n}$ de som, resp. het verschil, het product, het quotiënt van de rijen a_n en b_n . Het quotiënt heeft uiteraard alleen zin als $b_n \neq 0$ voor alle n .

(2.6) De som van twee convergente rijen is convergent en de limiet is de som van de limieten der afzonderlijke rijen.

Bewijs: Laat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ zijn. Bij een $\varepsilon > 0$ is er een $N_1(\frac{\varepsilon}{2})$ zodat voor $n > N_1$ geldt $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ en een $N_2(\frac{\varepsilon}{2})$ zodat voor $n > N_2$ geldt $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Noemen wij nu $N = \max(N_1, N_2)$; voor $n > N$ geldt dan $|(a+b) - (a_n + b_n)| = |a - a_n + b - b_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(2.7) Het verschil van twee convergente rijen is convergent en de limiet is het verschil van de limieten der afzonderlijke rijen.

Het bewijs is geheel analoog met dat van (2.6).

(2.8) Het product van twee convergente rijen is convergent en de limiet is het product van de limieten der afzonderlijke rijen.

Bewijs: Laat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ zijn. Omdat a_n convergeert is, volgens (2.5), a_n begrensd, d.w.z. er is een C zodat $|a_n| \leq C$ voor alle n . Bij een $\varepsilon > 0$ is er een $N_1(\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)})$ zodat voor $n > N_1$ geldt $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$ en een $N_2(\frac{\varepsilon}{2(1+C)})$ zodat voor $n > N_2$ geldt $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2(1+C)}$. Noemen wij $N = \max(N_1, N_2)$; voor $n > N$ geldt dan $|ab - a_n b_n| = |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| \leq |ab - a_n b| + |a_n b - a_n b_n| = |(a - a_n)b| + |a_n(b - b_n)| = |b||a - a_n| + |a_n||b - b_n| \leq \frac{|b|\varepsilon}{2(1+|b|)} + \frac{C\varepsilon}{2(1+C)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$.

(2.9) Het quotiënt $\frac{a_n}{b_n}$ van twee convergente rijen a_n en b_n met $b_n \neq 0$ voor alle n en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ is convergent en de limiet is het quotiënt van de limieten der afzonderlijke rijen.

Bewijs: Laat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ zijn. Dan is a_n begreind, d.w.z. er is een C zodat $|a_n| \leq C$ voor alle n . Omdat $b \neq 0$, is $\frac{1}{2}|b| > 0$. Er is dus een $N_1(\frac{1}{2}|b|)$ zodat voor $n > N_1$ geldt $|b - b_n| < \frac{1}{2}|b|$. Verder is $|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n|$, dus $|b_n| \geq |b| - |b - b_n|$. Als $n > N_1$ is dan $|b_n| > |b| - \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b|$. Bij een $\varepsilon > 0$ is een $N_2(\frac{\varepsilon|b|}{2})$ zodat $|a - a_n| < \frac{\varepsilon|b|}{2}$ en een $N_3(\frac{\varepsilon|b|^2}{4(1+C)})$ zodat $|b - b_n| < \frac{\varepsilon|b|^2}{4(1+C)}$. Noemen wij nu $N = \max(N_1, N_2, N_3)$; voor $n > N$ is dan $|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}| = |\frac{a - a_n}{b} + \frac{a_n(b_n - b)}{bb_n}| \leq \frac{|a - a_n|}{|b|} + \frac{|a_n||b - b_n|}{|b||b_n|} < \frac{\varepsilon|b|}{2|b|} + \frac{C}{|b|\frac{1}{2}|b|} \frac{\varepsilon|b|^2}{4(1+C)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

(2.10) Als van een convergente rij alle elementen ≥ 0 zijn, is de limiet ook ≥ 0 .

Bewijs: Laat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ zijn en $a_n \geq 0$ voor alle n . Stel $a < 0$. Er is dan een N zodat voor $n > N$ geldt $|a - a_n| < -\frac{1}{2}a$, dus $a_n - a < -\frac{1}{2}a$, dus $a_n < \frac{1}{2}a < 0$. Maar $a_{N+1} < 0$ is in strijd met het feit, dat $a_n \geq 0$ voor alle n , dus $a < 0$ is onmogelijk, dus $a \geq 0$.

(2.11) Als de rijen a_n en b_n convergent zijn en $a_n \geq b_n$ voor alle n dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Bewijs: Laat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ zijn, dan is, volgens (2.7), $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$. Maar $a_n - b_n \geq 0$ voor alle n , dus, volgens (2.10) geldt $a - b \geq 0$, dus $a \geq b$.

Let wel dat uit $a_n > b_n$ voor alle n niet volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$; ook in dat geval kan tot niet meer dan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ geconcludeerd worden. Voorbeeld: de rijen $a_n = \frac{1}{n}$ en $b_n = \frac{1}{2^n}$; inderdaad is $\frac{1}{n} > \frac{1}{2^n}$ voor alle n , maar beide rijen hebben 0 als limiet.

Evident is:

(2.12) Een constante rij $a_n = a$ is convergent met limiet a .

Door in (2.11) hetzij voor a_n , hetzij voor b_n een constante rij te nemen, vinden wij:

(2.13) Als voor een convergente rij a_n geldt $a_n \leq C$ (resp. $\geq C$) voor alle n , dan geldt ook $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq C$ (resp. $\geq C$).

Een rij a_n heet monotoon niet-dalend (of isotoon) als uit $m < n$ volgt $a_m \leq a_n$, monotoon niet-stijgend (of antitoon) als uit $m < n$ volgt $a_m \geq a_n$, monotoon stijgend (of streng isotoon) als uit $m < n$ volgt $a_m < a_n$, monotoon dalend (of streng antitoon) als uit $m < n$ volgt $a_m > a_n$.

In alle vier de gevallen heet de rij monotoon, in de laatste twee gevallen streng monotoon.

Het is dan met volledige inductie direct in te zien dat een rij isotoon is als $a_m \leq a_{m+1}$ voor alle m en analoog voor de andere gevallen.

We krijgen nu het volgende belangrijke convergentiecriteria:

(2.14) Een monotone begrensde rij is convergent. Als de rij isotoon (resp. antitoon) is, is de limiet $\geq$ (resp. $\leq$) ieder element van de rij; als de rij streng isotoon (resp. streng antitoon) is, is de limiet $>$ (resp. $>$) ieder element van de rij.

Bewijs: Laat a_n een begrensde isotone rij zijn. Dan is er een C zodat $a_n \leq C$ voor alle n . Neem de verzameling V der reële getallen x , waarvoor geldt $a_n \leq x$ voor alle n . Dan is V naar beneden begrensd want voor iedere x in V geldt $a_1 \leq x$, dus a_1 is een ondergrens van V . Laat a de onderste grens van V zijn (schrijfwijze $\inf V = a$). Neem een $\varepsilon > 0$, dan ligt $a - \varepsilon$ niet in V . Dus is er een N zodat $a - \varepsilon < a_N$. Verder is voor $n > N$ zeker $a_n \geq a_N$, dus $a - \varepsilon < a_n$. Verder is $a_n \leq a$ voor alle n , dus voor $n > N$ is $0 \leq a - a_n < \varepsilon$ dus $|a - a_n| < \varepsilon$. Dit geeft $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Tevens is bewezen dat $a_n \leq a$ voor alle n . Als de rij streng isotoon is en voor een of andere M zou $a_M = a$ zijn dan geeft $a_M < a_{M+1}$ en $a_{M+1} \leq a$ direct de tegenstrijdigheid $a_M < a$. Dus is in dat geval $a_n < a$ voor alle n . Voor een antitone rij gaat het bewijs analoog.

We merken op dat een isotone (resp. antitone) rij automatisch naar beneden (resp. boven) begrensd is, want $a_n \geq a_1$ (resp. $a_n \leq a_1$) voor alle n , dus a_1 is een ondergrens (resp. bovengrens); we behoeven dus alleen te eisen dat de rij naar boven (resp. beneden) begrensd is.

Opgave 10. Bewijs dat, als de rij a_n convergent is met limiet a , de rij $|a_n|$ convergent is met limiet $|a|$.

Opgave 11. Bewijs dat als de rij a_n convergent is met limiet a en $a_n \geq 0$ voor alle n , de rij $\sqrt{a_n}$ convergent is met limiet $\sqrt{a}$.

Opgave 12. Bewijs de convergentie en bereken de limiet van de volgende rijen $(3 + \frac{2}{n^2})^2$, $\frac{7n^2+3n+4}{2n^2+1}$ (denk eraan, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ bekend is), $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$.

Opgave 13. Laat de rij a_n gegeven zijn door $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Bewijs dat $a_n < 2$ voor alle n . Bewijs dat de rij a_n convergeert en bereken de limiet.

Opgave 14. Laat a_n een rij en s een getal zijn. Als dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - s}{a_n + s} = 0$, dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$.

Als toepassing van het voorafgaande behandelen we de rij a_n bepaald door $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Hiertoe hebben wij de volgende hulpstelling nodig:

(2.15) Als $\lambda > -1$ en n een natuurlijk getal is, geldt $(1+\lambda)^n \geq 1+n\lambda$ (ongelijkheid van Bernoulli).

Opgave 15. Bewijs (2.15).

Neem nu naast $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ nog $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, dan is blijkbaar $a_n < b_n$ voor alle n . Nu is

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2} > 1 - \frac{n}{n^2+2n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}, \text{ dus } (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}, \text{ dus de rij } a_n$$

is streng isotoon. Verder is

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}} \right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} > 1 + \frac{n+1}{(n+1)^2} =$$

$= 1 + \frac{1}{n+1}$, dus $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}$, dus de rij b_n is streng anti-toon. De rij a_n is naar boven begrensd wegens $a_n < b_n < b_1 = 4$. Volgens (2.15) is dus a_n convergent en de limiet is $> a_1 = 2$ en $\leq b_2 < b_1 = 4$. Dus:

(2.16) De rij $(1 + \frac{1}{n})^n$ is convergent. De limiet noemen wij e .

Opgave 16. Bewijs $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e$.

Het getal e zal in de analyse een zeer belangrijk getal blijken te zijn.

We kunnen in een convergente rij allerlei wijzigingen aanbrengen zodat deze toch convergent blijft met dezelfde limiet. Allereerst kunnen wij een eindig aantal elementen veranderen, immers als we dat doen is er zeker een N_1 zodat voor $n > N_1$ alle elementen ongewijzigd zijn gebleven; kiezen we dan bij een n de bijbehorende N in ieder geval $> N_1$ en overigens zoals bij de oorspronkelijke rij dan blijft alles hetzelfde. Verder kunnen wij de volgorde van de elementen willekeurig veranderen, d.w.z. we voegen aan ieder natuurlijk getal n een natuurlijk getal $\varphi(n)$ toe, dusdanig dat uit $m \neq n$ volgt $\varphi(m) \neq \varphi(n)$ en definiëren bij een gegeven rij a_n een nieuwe rij b_n door $b_n = a_{\varphi(n)}$. Het is daarbij niet nodig, dat alle natuurlijke getallen onder $\varphi(n)$ voorkomen; d.w.z. niet alle elementen van de oorspronkelijke rij behoeven in de nieuwe rij gebruikt te worden. Voorbeelden: de rij $a_1, a_3, a_5, \dots$ of $a_1, a_3, a_2, a_5, a_7, a_4, a_9, a_{11}, a_6, \dots$ of $a_2, a_1, a_5, a_4, a_8, a_7, \dots$. Een speciaal geval krijgen wij, als uit $m < n$ volgt $\varphi(m) < \varphi(n)$, d.w.z. de elementen van de nieuwe rij staan in dezelfde volgorde als die van de oude, alleen zijn er eventueel wat uit overgeelagen. In dat geval spreekt men van een deelrij van de oorspronkelijke rij.

Het is eenvoudig in te zien, dat ook in deze gevallen een convergente rij convergent blijft met dezelfde limiet. Laat bij een $\varepsilon > 0$ een N horen zodat voor $n > N$ geldt $|a - a_n| < \varepsilon$. De getallen $1, \dots, N$ treden nul of één maal onder de $\varphi(n)$ op. In ieder geval is er dus een N_1 te vinden zodat voor $n > N_1$ geldt $\varphi(n) > N$; voor die n is dan

$$|a - b_n| = |a - a_{\varphi(n)}| < \varepsilon.$$

Opgave 17. Als de rij a_n convergeert met limiet a en $a \neq 0$, dan bestaat er een rij b_n die convergeert met limiet a , dusdanig dat $b_n \neq 0$ voor alle n .

Ten slotte kunnen we voor de elementen van een convergente rij een eindig aantal elementen plaatsen; de nieuwe rij is dan convergent met dezelfde limiet. D.w.z. als a_n en b_n rijen zijn en er is een natuurlijk getal k zodat $a_n = b_{n+k}$ en de rij a_n is convergent met limiet a , dan is de rij b_n ook convergent met limiet a .

Opgave 18. Bewijs deze bewering.

Door combinatie van bovenstaande processen kunnen we ook een eindig aantal elementen aan een convergente rij toevoegen; de rij blijft dan convergent met dezelfde limiet.

Uit het resultaat van opgave 17 volgt nog dat in (2.9) de voorwaarde $b_n \neq 0$ voor alle n eigenlijk niet erg essentieel is ($b \neq 0$ is dat wel!); we kunnen b_n wel vervangen door een andere rij die ook limiet b heeft en waarvan wel alle elementen $\neq 0$ zijn.

Een rij die niet convergent is, heet divergent.

Als voor een rij a_n geldt dat bij ieder reëel getal α een natuurlijk getal N te vinden is, zodat voor $n > N$ geldt $a_n > \alpha$ (resp. $a_n < \alpha$), dan schrijven we $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$). We noemen de

rij dan echter niet convergent; men noemt haar wel eigenlijk divergent.

§ 3. Functies. Continuïteit.

Als aan ieder element x van een verzameling S reële getallen een reëel getal $f(x)$ is toegevoegd, noemen we deze toevoeging een (reële) functie; x heet het argument, $f(x)$ de functiewaarde van de functie. Zo is x^2 de functie die aan ieder getal zijn kwadraat toevoegt, $\sin x$ de functie die aan ieder getal de sinus van dat getal toevoegt, $\frac{1}{x}$ de functie die aan ieder getal $\neq 0$ zijn inverse toevoegt enz. S heet de definitie-verzameling van de functie. We zullen ons voor S meestal beperken tot zeer eenvoudige verzamelingen; in het bijzonder van belang zijn daarvoor de intervallen, die als volgt worden gedefinieerd:

Een interval is een verzameling reële getallen van één der volgende negen typen (hierin stellen a en b willekeurige doch vaste reële getallen voor):

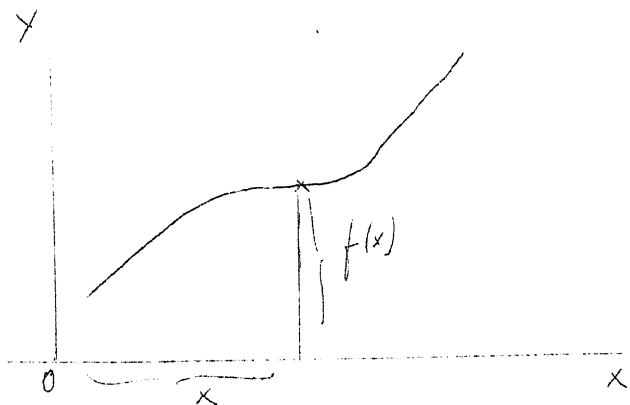
1°	alle reële getallen						dit heet $(-\infty, +\infty)$
2°	"	"	"	x, die voldoen aan $a < x$;	"	"	$(a, +\infty)$
3°	"	"	"	x, " " "	$a \leq x$;	"	$[a, +\infty)$
4°	"	"	"	x, " " "	$x < b$;	"	$(-\infty, b)$
5°	"	"	"	x, " " "	$x \leq b$;	"	$(-\infty, b]$
6°	"	"	"	x, " " "	$a < x < b$;	"	(a, b)
7°	"	"	"	x, " " "	$a \leq x < b$;	"	$[a, b)$
8°	"	"	"	x, " " "	$a < x \leq b$;	"	$(a, b]$
9°	"	"	"	x, " " "	$a \leq x \leq b$;	"	$[a, b]$

In die gevallen, waar a en/of b optreden heet a het beginpunt en b het eindpunt van het interval; begin- en eindpunt heten beide randpunten van het interval. De bij de schrijfwijze gevolgde regel is duidelijk; waar het beginpunt of eindpunt meegeteld wordt bij het interval staat een rechte haak, waar dat niet het geval is een ronde haak. De intervallen die in gevallen 1°, 2°, 4° of 6° verkeren heten open intervallen (twee ronde haken), die in 3°, 5°, 7° of 8° halfopen intervallen (een ronde en een rechte haak), die in 9° gesloten intervallen (twee rechte haken), die in 6°, 7°, 8°, 9° begrensde intervallen.

(3.1) De intervallen zijn die en slechts die verzamelingen reële getallen die aan de volgende eigenschap voldoen: als x en y tot de verzameling behoren, behoort ook ieder getal tussen x en y tot de verzameling.

Dat intervallen aan deze eigenschap voldoen is duidelijk. Om te bewijzen dat verzamelingen, die aan de eigenschap voldoen intervallen zijn onderscheiden wij verschillende gevallen al naar gelang de verzameling wel of niet naar boven begrensd is; wel of niet naar beneden begrensd is; als de verzameling naar boven begrensd is, de bovenste grens wel of niet tot de verzameling behoort; als de verzameling naar beneden begrensd is, de onderste grens wel of niet tot de verzameling behoort. De rest van het (overigens zeer eenvoudige) bewijs laten wij achterwege.

Van een functie kunnen wij een aanschouwelijke voorstelling ontwerpen, door in het platte vlak twee onderling loodrechte lijnen (coördinaat-



assen; X-as en Y-as) te tekenen en deze lijnen tot getallenrechten te maken met hun snijpunt als punt 0. Aan ieder punt is dan een paar (x,y) reële getallen toegevoegd dat verkregen wordt door het op de X-as en de Y-as te projecteren en de bij de projectiepunten behorende getallen te nemen. Van een functie f(x) noemen wij de verzameling der punten waaraan (x, f(x)) is toegevoegd de grafiek. Het is duidelijk, dat iedere lijn

evenwijdig met de Y-as de grafiek in ten hoogste één punt snijdt (d.w.z. in één als de bijbehorende x tot de definitieverzameling van $f(x)$ behoort, anders in geen).

We moeten bij een functie dus altijd aangeven wat de definitieverzameling is. We zullen dit echter dikwijls nalaten; bedoeld is dan de grootst mogelijke verzameling waarvoor de definitie der functie zinvol is.

Opgave 19. Het grootste gehele getal $\leq x$ (x een reëel getal), noemen wij entier x en schrijven wij $[x]$. Schets een grafiek van de functie $[x]$ en van de functie $x - [x]$.

Wanneer wij de volgende reële functie $f(x)$ beschouwen: $f(x) = 0$ als x irrationaal is en $f(x) = 1$ als x rationaal is, dan is het bevreemdend tekenen van een grafiek van deze functie niet mogelijk. Dat komt omdat deze functie het "vloeiende" karakter mist, dat de functies waarvan we wel grafieken konden tekenen, althans bij gedeelten, wel bezitten. Dit vloeiende karakter komt hierop neer, dat als de argumentwaarden dicht bij elkaar liggen de functiewaarden ook dicht bij elkaar liggen. Dit preciseren we nu nader in de volgende definitie:

Een functie $f(x)$ gedefinieerd op een verzameling S heet continu in a (a is een getal uit S), als bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een reëel getal $\delta > 0$ te vinden is, zodat voor alle getallen x uit S waarvoor $|a-x| < \delta$ geldt, ook $|f(a)-f(x)| < \varepsilon$ geldt (ε - δ -definitie van continuïteit). Als $f(x)$ continu is in alle getallen van S dan heet $f(x)$ continu (zonder nadere toevoeging).

We kunnen nu een verband leggen met het begrip convergentie door de eigenschap dat continue functies die functies zijn die convergente rijen in convergente rijen overvoeren:

(3.2) Een functie $f(x)$ gedefinieerd op een verzameling S is dan en slechts dan continu in a (a is een getal uit S) als voor iedere rij a_n (a_n is een getal uit S voor alle n), waarvoor geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ook geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$.

Bewijs: Stel eerst dat $f(x)$ continu in a is en neem een rij a_n (a_n is een getal uit S voor alle n) waarvoor geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Omdat $f(x)$ continu in a is is bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden zodat voor alle x uit S waarvoor $|x-a| < \delta$ geldt, ook $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ geldt. Omdat a_n naar a convergeert is bij $\delta > 0$ een N te vinden, zodat uit $n > N$ volgt $|a-a_n| < \delta$ en, omdat a_n in S ligt voor alle n , dus ook $|f(a)-f(a_n)| < \varepsilon$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$. Laat nu omgekeerd van $f(x)$ gegeven zijn dat voor iedere rij a_n (a_n is een getal uit S voor alle n), waarvoor geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, ook geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$. Stel nu dat $f(x)$ niet continu

in a is. Dan is er een $\varepsilon_1 > 0$ zodat voor alle $\delta > 0$ geldt dat er een x in S is waarvoor $|x-a| < \delta$ en $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon_1$. Nemen wij voor δ nu $\frac{1}{n}$ (n doorloopt de natuurlijke getallen) dan vinden wij een rij x_n (x_n ligt in S voor alle n) zodat $|x_n-a| < \frac{1}{n}$ en $|f(x_n)-f(a)| \geq \varepsilon_1$. Dan is blijkbaar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ en dus $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$, hetgeen echter in strijd is met $|f(x_n)-f(a)| \geq \varepsilon_1$ voor alle n . Dus is $f(x)$ continu in a .

Dat uit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ kunnen wij ook als volgt uitdrukken: $f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$; d.w.z. de processen van het nemen van de functie f en van het overgaan op een limiet zijn verwisselbaar.

Op grond van (3.2) hadden wij continuïteit ook anders kunnen definiëren:

Een functie $f(x)$ gedefinieerd op een verzameling S is continu in a (a is een getal uit S), als voor iedere rij a_n (a_n is een getal uit S voor alle n), waarvoor geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, ook geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ (limietdefinitie van continuïteit).

Opgave 20. Schets de grafiek van de functie $f(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x)$ en bewijs dat de functie continu is (het is de afstand van een reëel getal tot het dichtstbijzijnde gehele getal).

Als $f(x)$ en $g(x)$ functies zijn, die op dezelfde verzameling S gedefinieerd zijn, dan is de som (resp. het verschil, het product, het quotiënt) van $f(x)$ en $g(x)$ de functie $h(x)$ gedefinieerd door $h(x) = f(x) + g(x)$ (resp. $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$). Het quotiënt is alleen gedefinieerd als $g(x) \neq 0$ voor alle x uit S .

Uit de limietdefinitie van continuïteit en de overeenkomstige stellingen over convergente rijen volgt dan onmiddellijk:

(3.3) Als twee functies continu in a zijn is hun som, verschil, product en quotiënt ook continu in a .

Als $f(x)$ en $g(x)$ niet op dezelfde verzamelingen gedefinieerd zijn, maar hun definitieverzamelingen hebben wel iets gemeen, dan beperken wij voorbovenstaande definities de definitieverzameling eerst tot een verzameling waarop ze beide gedefinieerd zijn. Analooch beperken wij ons voor het quotiënt tot een verzameling waar $g(x) \neq 0$ is (als $g(x) = 0$ voor alle x gaat dat natuurlijk niet).

De volgende twee stellingen zijn evident:

(3.4) Een constante functie (d.w.z. $f(x) = f(y)$ voor alle x en y) is continu.

(3.5) De identieke functie $f(x) = x$ is continu.

Uit (3.3), (3.4) en (3.5) volgt:

(3.6) Een gehele rationale functie (of polynoom) $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

(a_k zijn getallen) is continu (wat met het symbool $\sum_{k=0}^n$ bedoeld wordt, is wel duidelijk).

Uit (3.3) en (3.6) volgt:

(3.7) Een gebroken rationale functie $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, waarin $P(x)$ en $Q(x)$ polynomen zijn, gedefinieerd voor die getallen x waarvoor $Q(x) \neq 0$, is continu.

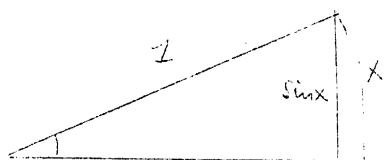
Verder is met behulp van de limietdefinitie makkelijk te bewijzen:

(3.8) Als $f(x)$ gedefinieerd is op S en continu is in a en $g(x)$ is een functie waarvan de definitieverzameling alle functiewaarden van $f(x)$ bevat en die bovendien continu is in $f(a)$ en $h(x)$ is de functie gedefinieerd op S door $h(x) = g(f(x))$, dan is $h(x)$ continu in a .

Opgave 21. Als $f(x)$ gedefinieerd is als in opgave 20 en $g(x)$ door $g(x) = f(\frac{1}{x})$ voor $x \neq 0$, dan is $g(x)$ continu. Het is echter onmogelijk $g(0)$ zo te definiëren dat $g(x)$ in 0 continu wordt. Schets een grafiek van $g(x)$

Opgave 22. Als $g(x)$ gedefinieerd is als in opgave 21 definiëren wij $h(x)$ door $h(x) = xg(x)$ voor $x \neq 0$ en $h(0) = 0$. Schets een grafiek van $h(x)$ en bewijs dat deze continu is (ook in 0).

De uit de goniometrie bekende functies $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ vatten wij altijd zo op dat de x in radialen gegeven is. Dan is uit de meetkunde bekend dat voor positieve x geldt $\sin x < x$. Immers voor



$x < \frac{1}{2}\pi$ volgt dit uit bijgaande figuur. voor $x \geq \frac{1}{2}\pi$ is $\sin x \leq 1 < \frac{1}{2}\pi < x$.

Opgave 23. Bewijs dat $\sin x$ en $\cos x$ continu zijn. Bepaal $g(x)$ en $h(x)$

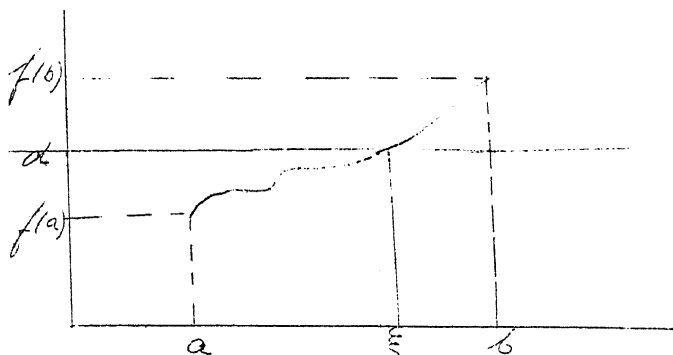
als in opgaven 21 en 22, nu echter uitgaande van $f(x) = \sin x$ en bewijs dezelfde beweringen over deze $g(x)$ en $h(x)$ als in opgaven 21 en 22.

(3.9) Als $f(x)$ gedefinieerd is op S en continu is in a en b is een getal zodat $f(a) \neq b$, dan is er een getal $\alpha > 0$ zodat voor alle getallen x in S waarvoor geldt $|x-a| < \alpha$ ook geldt $f(x) \neq b$.

Opgave 24. Bewijs (3.9).

Als een functie $f(x)$ gedefinieerd is op een interval en c is geen randpunt van het interval, dan is er een getal $\alpha > 0$ zodat het interval $(c-\delta, c+\delta)$ geheel tot het interval behoort (kies n.l. als het interval een linker eindpunt a en een rechter eindpunt b heeft $\alpha = \min(c-a, b-c)$ en als dat niet het geval is op analoge wijze), zodat als wij de δ in de ϵ - δ -definitie $\leq \alpha$ kiezen alle getallen x waarvoor geldt $|x-c| < \delta$, in het interval liggen, zodat de grootte van het interval waarop $f(x)$ gedefinieerd is niet van belang is voor de continuïteit.

(3.10) (Middelwaardestelling van Weierstrass) Een continue functie $f(x)$ gedefinieerd op een gesloten interval $[a, b]$ neemt iedere waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan, d.w.z. als d tussen $f(a)$ en $f(b)$ ligt, is er een ξ tussen a en b zodat $f(\xi) = d$.



Bewijs: Als $f(a)=f(b)$ bestaat er geen d tussen $f(a)$ en $f(b)$ en valt er dus niets te bewijzen. Als $f(a)<f(b)$, dan geldt $f(a)<d<f(b)$. Neem de verzameling V der getallen x , waarvoor geldt $a \leq x \leq b$ en

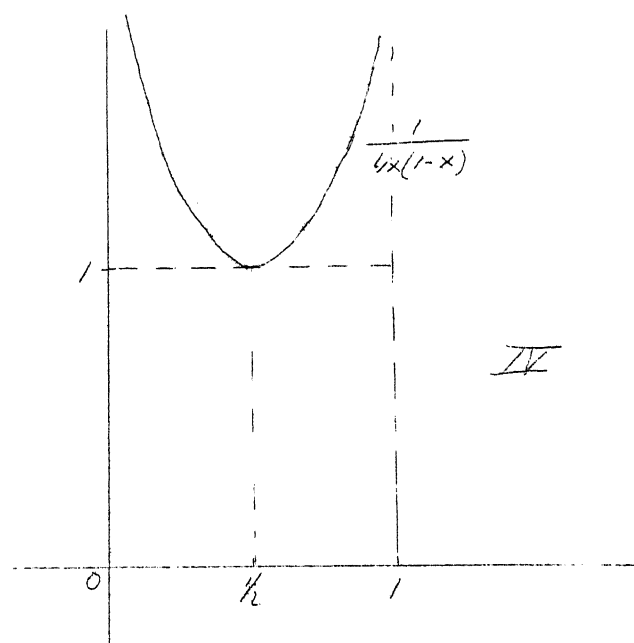
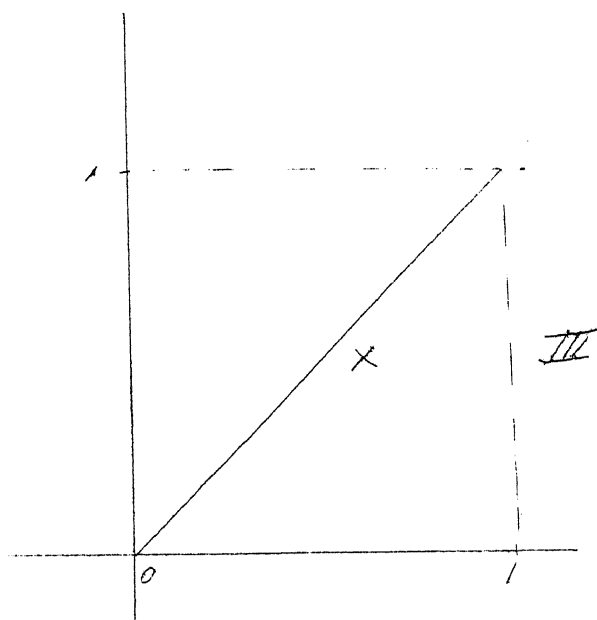
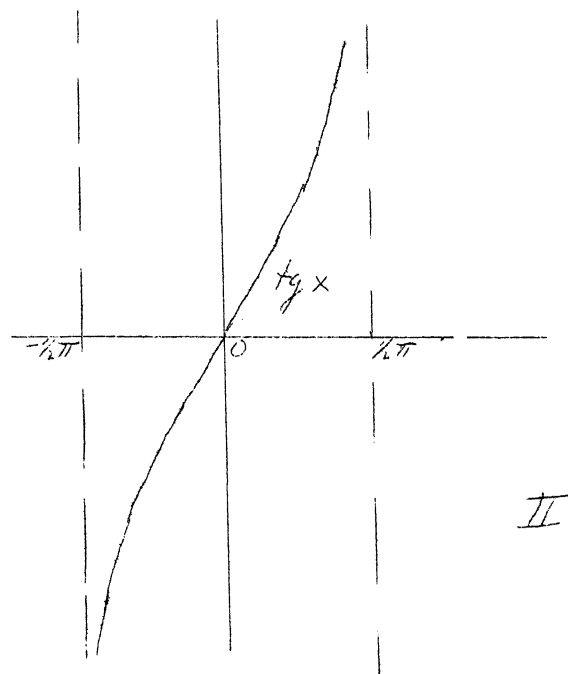
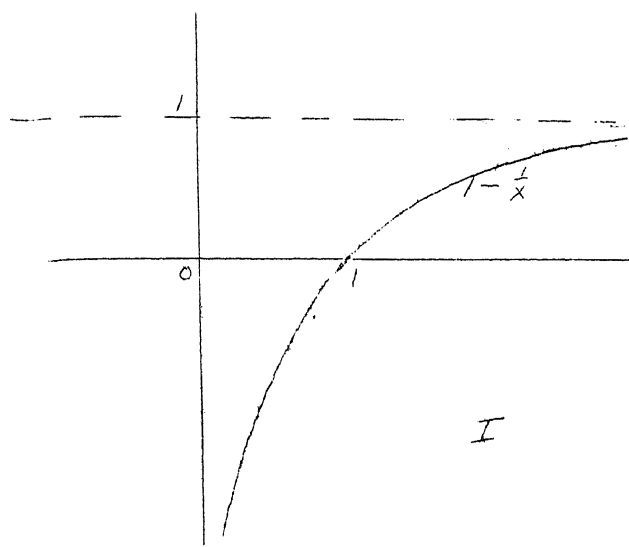
$f(x) \leq d$, dan ligt a in ieder geval in V . Verder is V uiteraard begrensd (b is een bovengrens), dus V heeft een bovenste grens ξ . We bewijzen nu dat $f(\xi) = d$. Stel eerst $f(\xi) > d$, d.w.z. ξ ligt niet in V . Omdat de functie $f(x)$ in ξ continu is, is er een $\delta_1 > 0$ zodat voor alle x waarvoor geldt $a \leq x \leq b$ en $|x - \xi| < \delta_1$, ook geldt $|f(x) - f(\xi)| < f(\xi) - d$, dus $f(\xi) - f(x) < f(\xi) - d$, dus $f(x) > d$. Verder is $\xi > a$ (immers omdat a in V ligt en ξ een bovengrens van V is, geldt $\xi \geq a$ en omdat $f(a) < d$ en $f(\xi) > d$ geldt $\xi \neq a$), dus voor $x_1 = \max(a, \xi - \frac{1}{2}\delta_1)$ geldt $a \leq x_1 \leq b$, $x_1 < \xi$ en verder $|x_1 - \xi| < \delta_1$ (dus $f(x_1) > d$) voor alle x met $x_1 \leq x \leq \xi$. Dus is x_1 een bovengrens van V , maar dit is wegens $x_1 < \xi$ in strijd met het feit, dat ξ de bovenste grens van V is. Dus $f(\xi) > d$ is uitgesloten. Stel nu $f(\xi) < d$, dan is er, omdat de functie $f(x)$ in ξ continu is, een $\delta_2 > 0$ zodat voor alle x waarvoor geldt $a \leq x \leq b$ en $|x - \xi| < \delta_2$, ook geldt $|f(x) - f(\xi)| < d - f(\xi)$, dus $f(x) - f(\xi) < d - f(\xi)$, dus $f(x) < d$. Verder is $\xi < b$ (immers omdat b een bovengrens van V is en ξ de bovenste grens van V , geldt $\xi \leq b$ en omdat $f(b) > d$ en $f(\xi) < d$ geldt $\xi \neq b$), dus voor $x_2 = \min(b, \xi + \frac{1}{2}\delta_2)$ geldt $a \leq x_2 \leq b$, $x_2 > \xi$ en $|x_2 - \xi| < \delta_2$, dus $f(x_2) < d$, dus x_2 in V , maar dit is wegens $x_2 > \xi$ in strijd met het feit, dat ξ een bovengrens van V is. Dus $f(\xi) < d$ is uitgesloten. Er blijft dus alleen de mogelijkheid $f(\xi) = d$ over, hetgeen te bewijzen was. Het geval dat $f(a) > f(b)$ is, kan geheel analoog behandeld worden (men kan ook op de functie $-f(x)$ overgaan).

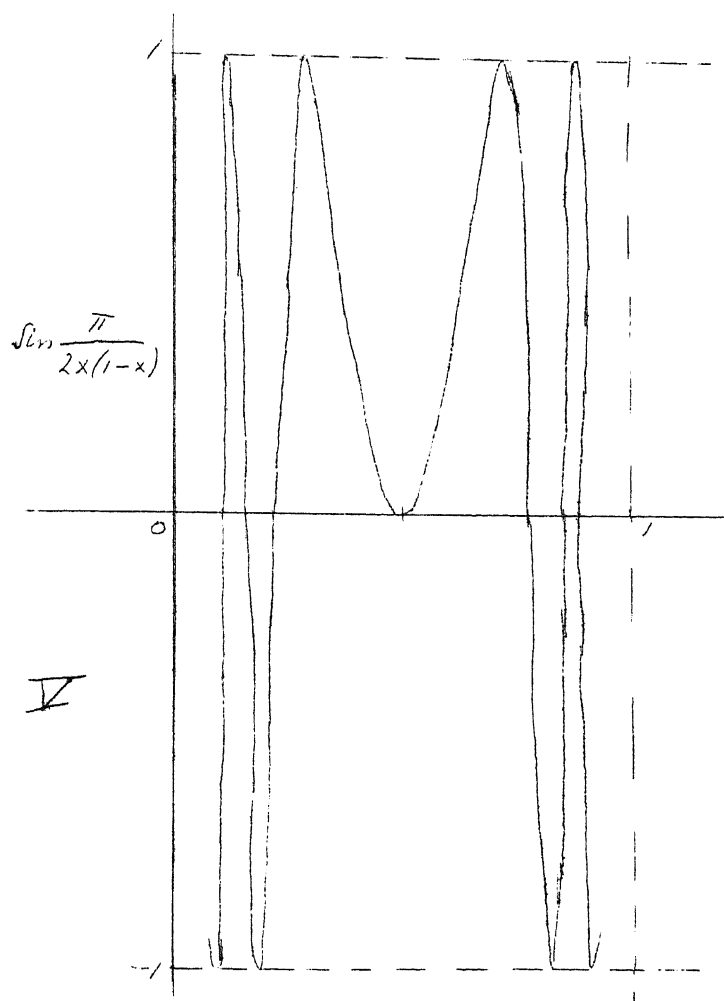
Opdracht 25. Bewijs met behulp van (3.10) dat in (3.9) $f(a) \neq b$ door $f(a) < b$ (resp. $f(a) > b$) en $f(x) \neq b$ door $f(x) < b$ (resp. $f(x) > b$) kan worden vervangen.

(3.11) Van een op een interval gedefinieerde reële functie is de verzameling der functiewaarden ook een interval.

Bewijs: Laat de functie $f(x)$ zijn, gedefinieerd op het interval S . Neem twee willekeurige functiewaarden b_1 en b_2 met $b_1 < b_2$, dan zijn er getallen a_1 en a_2 in S zodat $f(a_1) = b_1$ en $f(a_2) = b_2$. Omdat S een interval is en a_1 en a_2 in S liggen, behoort $[a_1, a_2]$ ook tot S en is $f(x)$ dus ook op $[a_1, a_2]$ gedefinieerd. Neem nu een willekeurig getal d tussen b_1 en b_2 , dan is er volgens (3.10) een ξ tussen a_1 en a_2 (en dus zeker ξ in S) zodat $f(\xi) = d$. Dit betekent echter dat d een functiewaarde van $f(x)$ is. ... (3.11) ... de verzameling der functiewaarden dus een interval.

We merken op, dat de definitieverzameling en de verzameling der functiewaarden in (3.11) geenszins tot hetzelfde der op blz. 15 genoemde negen typen intervallen behoeven te behoren! Om dit duidelijk te maken geven we enige voorbeelden.





In geval I is de functie $1 - \frac{1}{x}$ gedefinieerd op $(0, +\infty)$; de verzameling der functiewaarden is $(-\infty, 1)$. In geval II is de functie $\operatorname{tg} x$ gedefinieerd op $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; de verzameling der functiewaarden is $(-\infty, +\infty)$. In geval III is de functie x gedefinieerd op $[0, 1]$; de verzameling der functiewaarden is $[0, 1]$. In geval IV is de functie $\frac{1}{4x(1-x)}$ gedefinieerd op $(0, 1)$; de verzameling der functiewaarden is $[1, +\infty)$. In geval V is de functie $\sin \frac{\pi}{2x(1-x)}$ gedefinieerd op $(0, 1)$; de verzameling der functiewaarden is $[-1, 1]$.

Bij één der negen typen evenwel is de verzameling der functiewaarden wel van hetzelfde type. Als n.l. een continue functie gedefinieerd is op een gesloten interval (d.w.z. het definitie-interval is van het type 9^0), dan

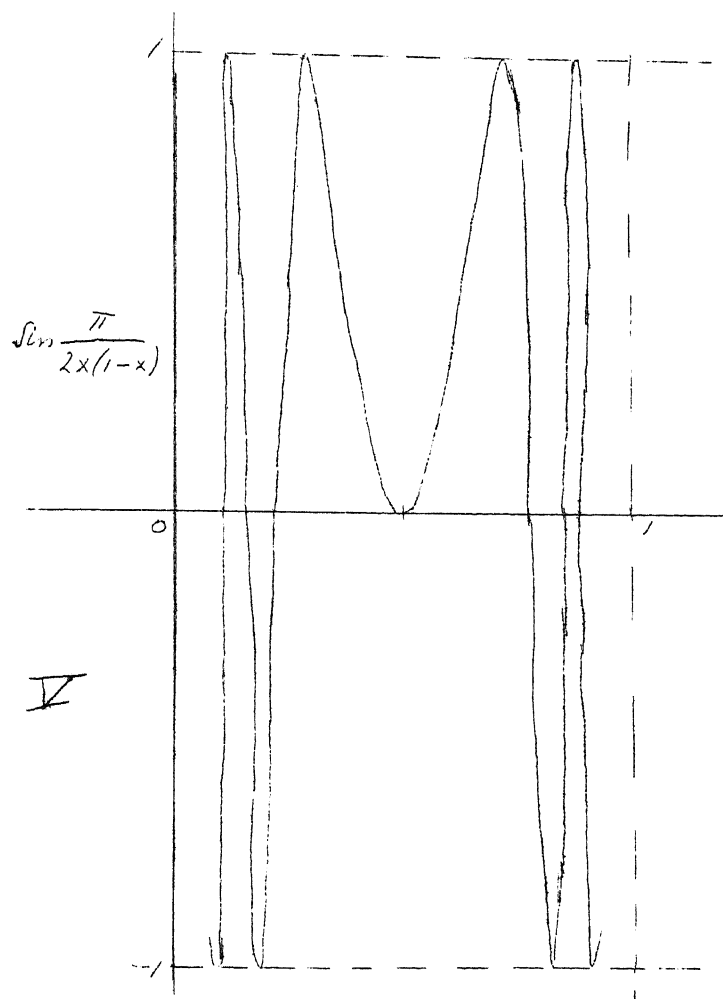
is de verzameling der functiewaarden ook een gesloten interval. We kunnen dit ook zo uitdrukken, dat de verzameling der functiewaarden een grootste en een kleinste element (een maximum en een minimum) bezit. Het omgekeerde geldt niet: in geval V hierboven is de verzameling der functiewaarden wel een gesloten interval, maar de definitieverzameling niet. We krijgen dus de volgende stelling:

(3.12) Een continue functie, gedefinieerd op een gesloten interval, heeft een maximum en een minimum.

Om deze stelling te bewijzen, bewijzen we eerst de volgende hulpstelling (een functie heet begrens, als de verzameling van haar functiewaarden begrens is):

(3.13) Een continue functie, gedefinieerd op een gesloten interval, is begrens.

Bewijs: Laat de continue functie $f(x)$ zijn, gedefinieerd op $[a, b]$. Stel dat $f(x)$ niet begrens is. Noem $a_1 = a$, $b_1 = b$. Nu is op minstens één van beide der intervallen $[a, \frac{1}{2}(a+b)]$ en $[\frac{1}{2}(a+b), b]$ de functie $f(x)$ niet begrens, want als zij op beide begrens was, was zij het ook op $[a, b]$. Kies uit de beide intervallen één als $[a_2, b_2]$, waarop $f(x)$ niet



In geval I is de functie $1 - \frac{1}{x}$ gedefinieerd op $(0, +\infty)$; de verzameling der functiewaarden is $(-\infty, 1)$. In geval II is de functie $\operatorname{tg} x$ gedefinieerd op $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; de verzameling der functiewaarden is $(-\infty, +\infty)$. In geval III is de functie x gedefinieerd op $[0, 1]$; de verzameling der functiewaarden is $[0, 1]$. In geval IV is de functie $\frac{1}{4x(1-x)}$ gedefinieerd op $(0, 1)$; de verzameling der functiewaarden is $[1, +\infty)$. In geval V is de functie $\sin \frac{\pi}{2x(1-x)}$ gedefinieerd op $(0, 1)$; de verzameling der functiewaarden is $[-1, 1]$.

Bij één der negen typen evenwel is de verzameling der functiewaarden wel van hetzelfde type. Als n.l. een continue functie gedefinieerd is op een gesloten interval (d.w.z. het definitie-interval is van het type 9^0), dan

is de verzameling der functiewaarden ook een gesloten interval. We kunnen dit ook zo uitdrukken, dat de verzameling der functiewaarden een grootste en een kleinste element (een maximum en een minimum) bezit. Het omgekeerde geldt niet: in geval V hierboven is de verzameling der functiewaarden wel een gesloten interval, maar de definitieverzameling niet. We krijgen dus de volgende stelling:

(3.12) Een continue functie, gedefinieerd op een gesloten interval, heeft een maximum en een minimum.

Om deze stelling te bewijzen, bewijzen we eerst de volgende hulpstelling (een functie heet begrensd, als de verzameling van haar functiewaarden begrensd is):

(3.13) Een continue functie, gedefinieerd op een gesloten interval, is begrensd.

Bewijs: Laat de continue functie $f(x)$ zijn, gedefinieerd op $[a, b]$. Stel dat $f(x)$ niet begrensd is. Noem $a_1 = a$, $b_1 = b$. Nu is op minstens één van beide der intervallen $[a, \frac{1}{2}(a+b)]$ en $[\frac{1}{2}(a+b), b]$ de functie $f(x)$ niet begrensd, want als zij op beide begrensd was, was zij het ook op $[a, b]$. Kies uit de beide intervallen één als $[a_2, b_2]$, waarop $f(x)$ niet

Een functie $f(x)$ heet monotoon niet-dalend (of isotoon) als uit $x < y$ volgt $f(x) \leq f(y)$, monotoon niet-stijgend (of antitoon) als uit $x < y$ volgt $f(x) \geq f(y)$, monotoon stijgend (of streng isotoon) als uit $x < y$ volgt $f(x) < f(y)$, monotoon dalend (of streng antitoon) als uit $x < y$ volgt $f(x) > f(y)$. In alle vier de gevallen heet de functie monotoon, in de laatste twee gevallen streng monotoon.

Een functie $f(x)$ heet eeneenduidig als uit $x \neq y$ volgt $f(x) \neq f(y)$.

Als $f(x)$ eeneenduidig is, heeft $f(x)$ een omkeersfunctie, die als volgt bepaald is. Bij iedere y in de verzameling der functiewaarden van $f(x)$ is er één en slechts één x in de definitieverzameling van $f(x)$ te vinden zodat $y = f(x)$. Deze toevoeging $x = g(y)$ heeft de verzameling der functiewaarden van $f(x)$ als definitieverzameling en de definitieverzameling van $f(x)$ als verzameling der functiewaarden; verder is $f(g(y)) = y$ en $g(f(x)) = x$. Deze functie $g(x)$ heet de omkeersfunctie van $f(x)$.

Uit de definities volgt direct, dat een streng monotone functie eeneenduidig is. Omgekeerd is een op een interval gedefinieerde eeneenduidige continue functie streng monotoon. Neem twee getallen x en y met $x < y$ in het interval. Uit de eeneenduidigheid volgt dat $f(x) \neq f(y)$, dus $f(x) < f(y)$ of $f(x) > f(y)$. Stel $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$ gaat analoog); als de functie dan streng monotoon is, is zij streng isotoon. Stel dat de functie niet streng isotoon is, dan is er een z zodat $f(z)$ t.o.v. $f(x)$ en $f(y)$ niet in overeenstemming is met de strenge isotonie. Er moeten nu verschillende gevallen onderscheiden worden, waarvan we er slechts één bij wijze van voorbeeld behandelen. Stel $z < x < y$ en $f(x) < f(z) < f(y)$. Volgens (3.10) is er een ξ tussen x en y zodat $f(\xi) = f(z)$, maar $\xi \neq z$ wegens $z < x$ en $x < \xi$; dit is echter in strijd met de eeneenduidigheid van de functie. Zo vinden we:

(3.14) Een op een interval gedefinieerde eeneenduidige continue functie is streng monotoon.

Het is dus zo, dat voor op een interval gedefinieerde continue functies eeneenduidigheid en strenge monotonie hetzelfde zijn. We zullen nu aantonen, dat in dat geval de omkering ook continu is.

(3.15) Een op een interval gedefinieerde continue streng isotone (resp. streng antitone) functie heeft een omkeersfunctie, die ook continu, streng isotoon (resp. streng antitoon) en op een interval gedefinieerd is.

Bewijs: Laat $f(x)$ de functie in kwestie zijn. Dan is $f(x)$ eeneenduidig, dus de omkeersfunctie $g(x)$ bestaat. Verder is volgens (3.11) de verzameling der functiewaarden van $f(x)$ een interval, dus $g(x)$ is op een interval gedefinieerd. Dat uit strenge isotonie (resp. strenge antitonie) van $f(x)$ strenge isotonie (resp. strenge antitonie) van $g(x)$ volgt is eenvoudig in te zien (ga dat zelf na). Er rest nog te bewijzen dat $g(x)$ continu is. We beschouwen het geval dat $f(x)$ (en dus $g(x)$) streng isotoon

is (het andere geval gaat analoog). Noem I het definitie-interval van $f(x)$ en K het definitie-interval van $g(x)$. Laat b een getal uit K zijn en $g(b) = a$, dus $f(a) = b$. Stel dat b geen randpunt van K is, dan is er een $\lambda > 0$ zodat $[b - \lambda, b + \lambda]$ geheel tot K behoort. Wegens de strenge isotonie is $c = g(b - \lambda) < g(b) = a < g(b + \lambda) = d$ en omdat I een interval is, behoort $[c, d]$ geheel tot I . Kies nu een $\varepsilon > 0$ en noem $p = \max(c, a - \varepsilon)$ $q = \min(d, a + \varepsilon)$, dan liggen p en q in I en is $f(p) < f(a) = b < f(q)$. Neem nu $\delta = \min(f(q) - b, b - f(p))$. Als $|y - b| < \delta$, dan is $f(p) \leq b - \delta < y < b + \delta \leq f(q)$, dus $f(p) < y < f(q)$, dus $a - \varepsilon \leq p = g(f(p)) < g(y) < g(f(q)) = q \leq a + \varepsilon$, dus $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$, dus $g(x)$ is continu in b . Als b wel een randpunt van K is, gaat het bewijs analoog.

(3.16) De functie x^n (n geheel en $\neq 0$), gedefinieerd voor reële $x > 0$ is streng monotoon en wel isotoon voor $n > 0$ en antitoon voor $x < 0$.

Opgave 26. Bewijs (3.16).

Verder heeft deze functie x^n als verzameling van functiewaarden het interval $(0, +\infty)$. Dit volgt uit het feit, dat uit $x > 0$ volgt $x^n > 0$, uit $n < 0$ en $x > 1$ volgt $x^n \geq x$, uit $n > 0$ en $x < 1$ volgt $x^n \leq x$, uit $n < 0$ en $x > 1$ volgt $x^n \leq \frac{1}{x}$ en uit $n < 0$ en $x < 1$ volgt $x^n \geq \frac{1}{x}$. Hieruit en uit (3.15) volgt:

(3.17) De functie x^n (n geheel en $\neq 0$), gedefinieerd op $(0, +\infty)$ heeft een omkeersfunctie (die we $x^{\frac{1}{n}}$ noemen), gedefinieerd op $(0, +\infty)$, die continu en streng monotoon is en wel isotoon voor $n > 0$ en antitoon voor $n < 0$.

Er geldt dus $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$ en $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x$. Past men (3.17) toe voor $n = 2$ dan vinden we opnieuw het bestaan van $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

We definiëren voor p geheel, q natuurlijk, a reëel > 0 nu $a^{\frac{p}{q}}$ door $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$. Dit geeft een definitie van a^r voor rationale r , wegens:

(3.18) Als p en s geheel zijn en q en t natuurlijk, a reëel > 0 en $pt = qs$, dan is $(a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^s)^{\frac{1}{t}}$.

Bewijs: $((a^p)^{\frac{1}{q}})^{qt} = (((a^p)^{\frac{1}{q}})^q)^t = (a^p)^t = a^{pt} = a^{qs} = (a^s)^q = (((a^s)^{\frac{1}{t}})^t)^q = ((a^s)^{\frac{1}{t}})^{qt}$. Omdat de functie x^{qt} een eeneenduidige functie is, volgt hieruit $(a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^s)^{\frac{1}{t}}$.

(3.19) Voor r en s rationaal, a en b reëel > 0 geldt:

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{r+s}, \\ a^r b^r &= (ab)^r, \\ (a^r)^s &= a^{rs}. \end{aligned}$$

Opgave 27. Bewijs (3.19).

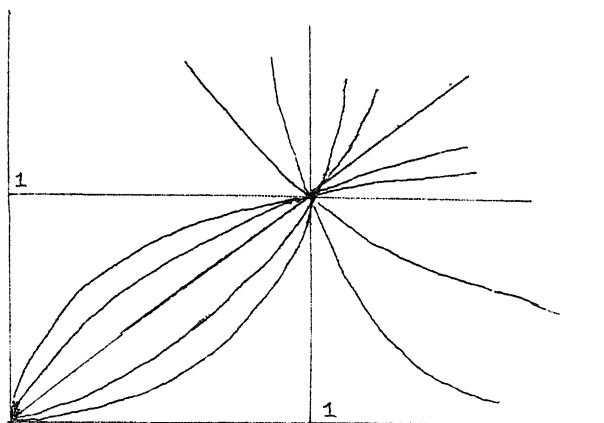
(3.20) De functie x^r (r rationaal), gedefinieerd op $(0, +\infty)$ is continu.

Bewijs: Laat $r = \frac{p}{q}$ zijn (p geheel, q natuurlijk). De stelling volgt dan direct uit (3.16), (3.17) en (3.8).

(3.21) De functie x^r (r rationaal en $\neq 0$), gedefinieerd op $(0, +\infty)$ is streng monotoon en wel isotoon als $r > 0$ en antitoon als $r < 0$.

Opgave 28. Bewijs (3.21).

De grafieken van de functies x^r voor diverse waarden van r zien er uit als hiernaast geschetst.



We hebben nu a^b gedefinieerd in de volgende gevallen: b natuurlijk, a reëel; b geheel, a reëel $\neq 0$; b rationaal, a reëel > 0 . We zullen ook nog machten met reële exponenten moeten definiëren. Dat zal pas later gebeuren.

Als een functie $f(x)$ continu is in a , schrijven we wel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. We kunnen aan het linkerlid evenwel soms zin toekennen zonder dat het gelijk is aan $f(a)$, ja zelfs zonder dat a tot de definitieverzameling van $f(x)$ behoort. We lichten dit toe aan een voorbeeld. Als functie nemen we $\frac{\sin x}{x}$. Deze is gedefinieerd voor $x \neq 0$; voor het gemak beperken we ons tot $x > 0$. Uit de meetkunde is bekend, dat als $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, geldt $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, dus $\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$, dus $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Nu is $\cos x$ continu in 0 (zie opgave 23), dus is bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden zodat uit $|x| < \delta$ volgt $|\cos x - 1| = |\cos x - \cos 0| < \varepsilon$. Voor $0 < x < \delta$ is dan $\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = |\cos x - 1| < \varepsilon$. Voor $x < 0$ gaat dit evenzo want uit $\sin(-x) = -\sin x$ volgt $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. We schrijven daarom $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. We kunnen dit ook zo uitdrukken: voor iedere rij x_n , waarvoor geldt $x_n \neq 0$ voor alle n en $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, geldt ook $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$.

Als de functie $f(x)$ gedefinieerd is op S en als a een getal is dusdanig dat er een getal $\lambda > 0$ bestaat zodat $(a-\lambda, a)$ of $(a, a+\lambda)$ (of beide geheel tot S behoort (a zelf hoeft niet in S te liggen, maar mag wel in S liggen) en als er een getal b is, zodat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is zodat voor iedere x in S met $x \neq a$ en $|x-a| < \delta$ geldt $|f(x)-b| < \varepsilon$, dan definiëren we $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Dit heet een continue limietovergang. Als in deze definitie de eis dat $(a-\lambda, a)$ of $(a, a+\lambda)$ geheel tot S behoort, vervangen wordt door de eis dat $(a-\lambda, a)$ geheel tot S behoort en als verder $x \neq a$ vervangen wordt door $x < a$, dan definiëren we $\lim_{x \uparrow a} f(x) = b$. Analooq definiëren we $\lim_{x \downarrow a} f(x) = b$. Er worden dan dus alleen de getallen $< a$, resp. $> a$ meegeteld.

Let wel, dat in de definitie van $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ de voorwaarde $x \neq a$ zeer essentieel is, ook als a in S ligt! Zo geldt b.v. voor de functie $f(x)$, die $= 0$ is voor $x \neq 0$ en $= 1$ voor $x = 0$, toch $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Hierboven is bewezen:

$$(3.22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

De volgende beide stellingen zijn evident:

(3.23) Als $f(x)$ gedefinieerd is op een interval, als a een getal in dat interval is en als $f(x)$ continu is in a , dan geldt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

(3.24) Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (dit betekent hier en analoog in latere gevallen als $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ bestaat en gelijk aan b is), en als $\lim_{x \downarrow a} f(x) = b$, dan geldt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

De hier gegeven definitie van $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ komt overeen met de $\epsilon - \delta$ -definitie van continuïteit. We kunnen ook een karakterisering met limieten van rijen geven:

(3.25) Voor een functie $f(x)$ gedefinieerd op S geldt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ dan en slechts dan als er een getal $\lambda > 0$ bestaat zodat $(a - \lambda, a)$ of $(a, a + \lambda)$ (of beide) geheel tot S behoort en als voor iedere rij x_n met x_n in S en $x_n \neq a$ voor alle n , waarvoor geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ook geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Het bewijs van (3.25) is geheel analoog met het bewijs van de stelling over de equivalentie van de limietdefinitie en de $\epsilon - \delta$ -definitie van continuïteit d.i. (3.2). We laten het daarom achterwege.

Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat, zijn er de volgende drie mogelijkheden:

- 1°. a ligt in S en $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; dan is $f(x)$ continu in a .
- 2°. a ligt in S en $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$. Dan heet a een verwijderbare discontinuïteit van $f(x)$, omdat we $f(x)$ in a zo kunnen veranderen, dat de functie wel continu in a wordt; exacter uitgedrukt: de functie $h(x)$ gedefinieerd door $h(x) = f(x)$ voor x in S met $x \neq a$ en $h(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ is wel continu in a .
- 3°. a ligt niet in S . Dan kan de functie in a continu voortgezet (of uitgebreid) worden, d.w.z. de functie $h(x) = f(x)$ voor x in S en $h(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ is continu in a .

Een voorbeeld van 2° is de functie $f(x) = 0$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 1$; hier is 0 de verwijderbare discontinuïteit. Een voorbeeld van 3° is de functie $\frac{\sin x}{x}$. Deze kan in 0 continu worden voortgezet met waarde 1.

Als voor de functie $f(x)$ wel geldt dat er een $\lambda > 0$ bestaat zodat $(a - \lambda, a)$ of $(a, a + \lambda)$ geheel tot S behoren, maar toch $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ niet bestaat, dan heet a een essentiële discontinuïteit van $f(x)$. Zo heeft $\sin \frac{1}{x}$ in 0 een essentiële discontinuïteit (zie opgave 23) en evenzo $\sin \frac{\pi}{2x(1-x)}$ in 0 en 1 (zie geval V bovenaan blz. 21).

Als $f(x)$ gedefinieerd is op S en als er een getal $\lambda > 0$ bestaat zodat $(\lambda, +\infty)$ geheel tot S behoort en als er een getal b is zodat bij iedere $\epsilon > 0$ een α te vinden is zodat voor iedere x in S met $x > \alpha$ geldt $|f(x) - b| < \epsilon$, dan definiëren we $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Analoog definiëren we $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Opgave 29. Bewijs dat uit $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = b$, volgt $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = b$.

Opgave 30. Bewijs het bestaan en bereken de waarde van $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+6}{3x^3-x^2}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{x-\frac{1}{2}\pi}$.

§4. Differentieerbare functies.

We gaan nu aan de functies die we beschouwen verdergaande beperkingen opleggen dan we tot nu toe gedaan hebben. We eisen dat de grafiek van de

functie $f(x)$ in het punt $(a, f(a))$ een raaklijn heeft. Dit betekent het volgende. We verbinden het punt $(a, f(a))$ met een ander punt $(x, f(x))$ van de grafiek door een rechte lijn (koorde); vervolgens laten we x tot a naderen. Als dan de koorde (die natuurlijk steeds door $(a, f(a))$ gaat) tot een bepaalde limietstand nadert, dan

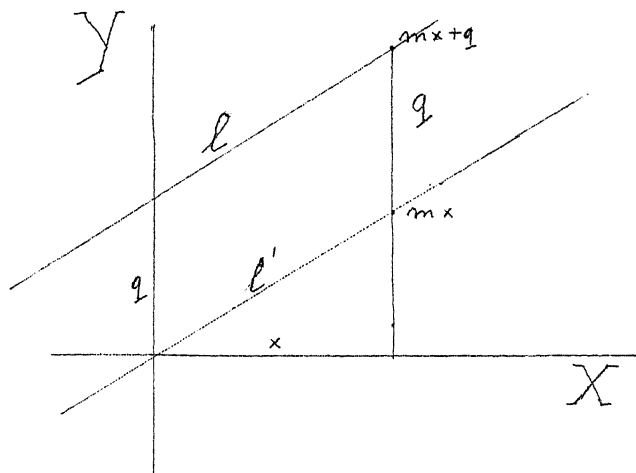
heet de zo verkregen rechte de raaklijn aan de grafiek in het punt $(a, f(a))$.

Om dit nader analytisch te kunnen beschouwen, moeten we dit uit de meetkunde in de analyse vertalen. Daarvoor is allereerst een analytische bepaling van het begrip "rechte lijn" noodzakelijk. We beschouwen daartoe eerst een rechte lijn door de oorsprong (het punt $(0,0)$), die niet de Y-as is. Dan is het op grond van gelijkvormigheid van driehoeken direct

duidelijk, dat voor twee punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) , beide buiten de oorsprong, die op de lijn gelegen zijn, geldt $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$. Noemen we de waarde van deze verhouding m , dan geldt dus voor ieder punt (x, y) buiten de oorsprong gelegen op de lijn, dat $\frac{y}{x} = m$, dus $y = mx$. Aan de laatste betrekking voldoet de oorsprong blijkbaar ook. Verder

ligt ook omgekeerd ieder punt (a, ma) blijkbaar op de rechte lijn, omdat de rechte lijn evenwijdig met de Y-as bestaande uit de punten met X-coördinaat a de gegeven rechte lijn in één en slechts één punt snijdt, hetwelk alleen het punt (a, ma) kan zijn. De rechte lijn bestaat dus uit die en slechts die punten (x, y) , die voldoen aan $y = mx$; anders uitgedrukt: de rechte lijn is de grafiek van de functie mx . Omgekeerd heeft voor ieder reëel getal m de functie mx blijkbaar een rechte lijn als grafiek, n.l. de rechte lijn door $(0,0)$ en $(1, m)$. Het getal m mag ook negatief zijn; het is de tangens van de hoek die de rechte maakt met de positieve X-as.

Nemen we nu een willekeurige rechte l , die niet evenwijdig of samenvallend met de Y -as is, dan beschouwen we daarnaast de hiermee evenwijdige



rechte l' door de oorsprong, die dus niet met de Y -as samenvalt. Dan bestaat l' volgens het bovenstaande uit de punten (x, y) die voldoen aan $y = mx$. Noem q de Y -coördinaat van het snijpunt van l met de Y -as. Dan is het meetkundig duidelijk, dat als (x, y) een punt van l is, $(x, y - q)$ een punt van l' is en omgekeerd als (x, y) een punt van l' is, $(x, y + q)$

een punt van l is. Hieruit volgt dat l bestaat uit die en slechts die punten (x, y) , waarvan geldt $y = mx + q$; anders uitgedrukt: l is de grafiek van de functie $mx + q$. Men noemt $y = mx + q$ de vergelijking van l . Omgekeerd heeft voor ieder tweetal reële getallen m en q de functie $mx + q$ blijkbaar een rechte lijn als grafiek, n.l. de rechte evenwijdig (of als $q = 0$ samenvallend) met de grafiek van mx , die de Y -as snijdt in een punt met Y -coördinaat q . Men noemt m de richtingscoëfficiënt van de lijn; deze bepaalt inderdaad de richting van de lijn: evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, snijdende lijnen hebben verschillende richtingscoëfficiënten.

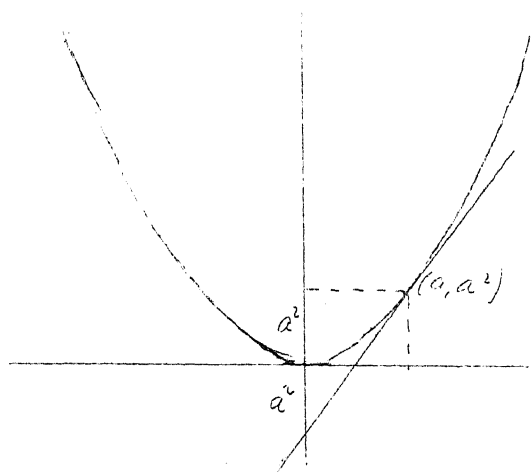
De lijnen evenwijdig of samenvallend met de Y -as vallen hier niet onder; ze zijn voor ons nu ook niet van belang. Het is echter direct duidelijk, dat een dergelijke lijn bestaat uit die en slechts die punten (x, y) waarvoor geldt $x = a$.

We bepalen nu de vergelijking van een lijn door twee verschillende punten (a_1, b_1) en (a_2, b_2) . Daar we lijnen evenwijdig of samenvallend met de Y -as uitgesloten hebben, mogen we $a_1 \neq a_2$ veronderstellen. Laat de vergelijking van de lijn $y = mx + q$ zijn, dan moeten m en q bepaald worden. Nu moeten (a_1, b_1) en (a_2, b_2) op de lijn liggen dus moet gelden $b_1 = ma_1 + q$ en $b_2 = ma_2 + q$. Door aftrekken vinden we hieruit $b_2 - b_1 = m(a_2 - a_1)$ en dus, wegens $a_1 \neq a_2$, $m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ en dan $q = b_1 - ma_1 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}$. De lijn met ver-

gelijking $y = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} x + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}$ gaat inderdaad door (a_1, b_1) en (a_2, b_2) en is dus de gezochte lijn. De richtingscoëfficiënt van deze lijn is dus $\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$. De vergelijking is nog wel in een wat overzichtelijker gedaante te brengen. Trekken we van beide leden b_1 af, dan krijgen we $y - b_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} x + \frac{a_1(b_2 - b_1)}{a_2 - a_1}$, dus $y - b_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(x - a_1)$.

Opgave 31. Bewijs dat, als twee lijnen met richtingscoëfficiënten m_1 en m_2 loodrecht op elkaar staan, geldt $m_1 m_2 = -1$.

Keren we nu terug tot de raaklijndefinitie. Daar de raaklijn in ieder geval door het punt $(a, f(a))$ gaat, is deze door zijn richtingscoëfficiënt volkomen bepaald. De richtingscoëfficiënt van de koorde door $(a, f(a))$ en $(x, f(x))$ is $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; gezocht is dus de limiet hiervan als x tot a nadert. Nemen we als voorbeeld de functie x^2 ; de grafiek daarvan heet een



parabool. Om de raaklijn aan deze grafiek in het punt (a, a^2) te bepalen, nemen we de koorde door (a, a^2) en (b, b^2) ; deze heeft als vergelijking $y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a)$, dus $y - a^2 = (b + a)(x - a)$. Laten we nu b tot a naderen, dan wordt dit $y - a^2 = 2a(x - a)$ hetgeen de vergelijking van de raaklijn in (a, a^2) is, met richtingscoëfficiënt $2a$. De vergelijking is als volgt te schrijven: $y = 2ax - a^2$.

Een functie $f(x)$, gedefinieerd op een interval, heet differentieerbaar in a (a in het definitie-interval), als $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ bestaat. De waarde van deze limiet heet de afgeleide of het differentiaalquotiënt van $f(x)$ in a .

Men kan dit ook zo uitdrukken: een functie $f(x)$, gedefinieerd op een interval, is differentieerbaar in a (a in het definitie-interval) als de functie $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (differentiequotiënt), die blijkbaar gedefinieerd is voor alle x in het definitie-interval van $f(x)$ behalve in a , continu uitgebreid kan worden in a .

De afgeleide in a van $f(x)$ wordt geschreven $\left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x=a}$ of $[f'(x)]_{x=a}$ of wat korter, maar minder duidelijk $\frac{df(a)}{dx}$ of $f'(a)$.

Als $f(x)$ differentieerbaar is in alle getallen van zijn definitieverzameling heeft $f(x)$ differentieerbaar (zonder nadere toevoeging). De afgeleide is dan weer een functie van x , die we $\frac{df(x)}{dx}$ of $f'(x)$ schrijven.

In het bovenstaande voorbeeld hebben we gevonden, dat de afgeleide van x^2 in a gelijk is aan $2a$; dit geldt voor iedere a , dus de afgeleide van x^2 is $2x$.

Van de functies $\sin x$ en $\cos x$ kunnen we de afgeleiden ook makkelijk uit de differentiequotiënten door limietovergang vinden, als we gebruik maken van (3.22).

Opgave 32. Bewijs $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ en $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$.

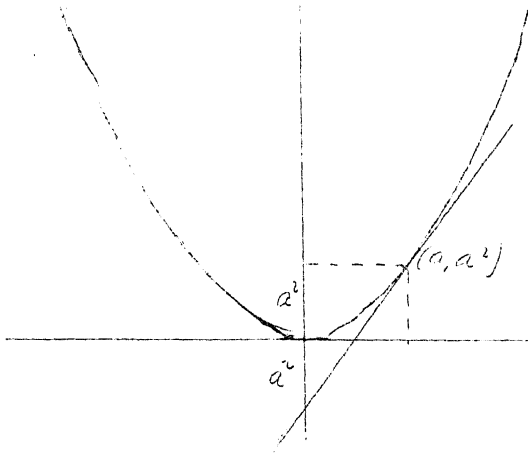
Opgave 33. Bepaal de afgeleide van x^3 .

In een differentiequotiënt $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ stelt men dikwijls $x = a + h$; als dan $x \rightarrow a$, geldt $h \rightarrow 0$. De afgeleide wordt dan $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Let wel, dat als a geen randpunt van het definitie-interval is, ook negatieve waarden van h beschouwd moeten worden!

Als $f(x)$ differentieerbaar is in a , geldt dat $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$ een

Keren we nu terug tot de raaklijndefinitie. Daar de raaklijn in ieder geval door het punt $(a, f(a))$ gaat, is deze door zijn richtingscoëfficiënt volkomen bepaald. De richtingscoëfficiënt van de koorde door $(a, f(a))$ en $(x, f(x))$ is $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; gezocht is dus de limiet hiervan als x tot a nadert. Nemen we als voorbeeld de functie x^2 ; de grafiek daarvan heet een



parabool. Om de raaklijn aan deze grafiek in het punt (a, a^2) te bepalen, nemen we de koorde door (a, a^2) en (b, b^2) ; deze heeft als vergelijking $y - a^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a)$, dus $y - a^2 = (b + a)(x - a)$. Laten we nu b tot a naderen, dan wordt dit $y - a^2 = 2a(x - a)$ hetgeen de vergelijking van de raaklijn in (a, a^2) is, met richtingscoëfficiënt $2a$. De vergelijking is als volgt te schrijven: $y = 2ax - a^2$.

Een functie $f(x)$, gedefinieerd op een interval, heet differentieerbaar in a (a in het definitie-interval), als $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ bestaat. De waarde van deze limiet heet de afgeleide of het differentiaalquotiënt van $f(x)$ in a .

Men kan dit ook zo uitdrukken: een functie $f(x)$, gedefinieerd op een interval, is differentieerbaar in a (a in het definitie-interval) als de functie $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (differentiequotiënt), die blijkbaar gedefinieerd is voor alle x in het definitie-interval van $f(x)$ behalve in a , continu uitgebreid kan worden in a .

De afgeleide in a van $f(x)$ wordt geschreven $\left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x=a}$ of $[f'(x)]_{x=a}$ of wat korter, maar minder duidelijk $\frac{df(a)}{dx}$ of $f'(a)$.

Als $f(x)$ differentieerbaar is in alle getallen van zijn definitieverzameling heeft $f(x)$ differentieerbaar (zonder nadere toevoeging). De afgeleide is dan weer een functie van x , die we $\frac{df(x)}{dx}$ of $f'(x)$ schrijven.

In het bovenstaande voorbeeld hebben we gevonden, dat de afgeleide van x^2 in a gelijk is aan $2a$; dit geldt voor iedere a , dus de afgeleide van x^2 is $2x$.

Van de functies $\sin x$ en $\cos x$ kunnen we de afgeleiden ook makkelijk uit de differentiequotiënten door limietovergang vinden, als we gebruik maken van (3.22).

Opgave 32. Bewijs $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ en $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$.

Opgave 33. Bepaal de afgeleide van x^3 .

In een differentiequotiënt $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ stelt men dikwijls $x = a + h$; als dan $x \rightarrow a$, geldt $h \rightarrow 0$. De afgeleide wordt dan $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Let wel, dat als a geen randpunt van het definitie-interval is, ook negatieve waarden van h beschouwd moeten worden!

Als $f(x)$ differentieerbaar is in a , geldt dat $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$ een

functie $\varepsilon(x)$ is die naar nul gaat als $x \rightarrow a$. Dan is $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$. Deze betrekking geldt, als we $\varepsilon(a) = 0$ stellen, ook voor $x = a$; bovendien is dan $\varepsilon(x)$ continu in a . We kunnen deze betrekking ook voor de definitie van differentieerbaarheid gebruiken:

(4.1) Een functie $f(x)$, gedefinieerd op een interval S , is dan en slechts dan differentieerbaar in a , als er een getal $f'(a)$ en een in S gedefinieerde functie $\varepsilon(x)$ bestaat, zodat $\varepsilon(a) = 0$, $\varepsilon(x)$ continu in a is, en $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$.

Hieruit volgt onmiddellijk:

(4.2) Als $f(x)$ differentieerbaar is in a , is $f(x)$ continu in a .

Het omgekeerde van (4.2) geldt niet, want de functie $|x|$ is continu in 0 , maar niet differentieerbaar; voor $x > 0$ is het differentiequotient $= 1$ en voor $x < 0$ is het $= -1$.

(4.3) De som van twee in a differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$ is differentieerbaar in a en de afgeleide is $f'(a) + g'(a)$ (er geldt dus $\frac{d(f(x) + g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$).

Bewijs: $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ met $\varepsilon_1(a) = 0$ en $\varepsilon_1(x)$ continu in a en

$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\varepsilon_2(x)$ met $\varepsilon_2(a) = 0$ en $\varepsilon_2(x)$ continu in a . Dan is $f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (x-a)(f'(a) + g'(a)) + (x-a)(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))$. Nu geldt voor $\varepsilon_3(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$, dat $\varepsilon_3(a) = 0$ en $\varepsilon_3(x)$ continu in a is.

(4.4) Als $f(x)$ differentieerbaar is in a en c is een constante, dan is $cf(x)$ differentieerbaar in a met afgeleide $cf'(a)$ (er geldt dus $\frac{d(cf(x))}{dx} = c \frac{df(x)}{dx}$).

Bewijs: $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$ met $\varepsilon(a) = 0$ en $\varepsilon(x)$ continu in a . Dan is $cf(x) = cf(a) + (x-a)cf'(a) + (x-a)c\varepsilon(x)$. Nu geldt voor $\varepsilon_1(x) = c\varepsilon(x)$, dat $\varepsilon_1(a) = 0$ en $\varepsilon_1(x)$ continu in a is.

Door combinatie van (4.3) en (4.4) vindt men

(4.5) Het verschil van twee in a differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$ is differentieerbaar in a en de afgeleide is $f'(a) - g'(a)$ (er geldt dus $\frac{d(f(x) - g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx}$).

(4.6) Het product van twee in a differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$ is differentieerbaar in a en de afgeleide is $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (er geldt dus $\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$).

Bewijs: $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ met $\varepsilon_1(a) = 0$ en $\varepsilon_1(x)$ continu in a en

$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + (x-a)\varepsilon_2(x)$ met $\varepsilon_2(a) = 0$ en $\varepsilon_2(x)$ continu in a . Dan is $f(x)g(x) = f(a)g(a) + (x-a)(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) + (x-a)(g(a)\varepsilon_1(x) + (x-a)f'(a)g'(a) + (x-a)g'(a)\varepsilon_1(x) + f(a)\varepsilon_2(x) + (x-a)f'(a)\varepsilon_2(x) + (x-a)\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))$. Nu geldt voor $\varepsilon_3(x) = g(a)\varepsilon_1(x) + (x-a)f'(a)g'(a) + (x-a)g'(a)\varepsilon_1(x) + f(a)\varepsilon_2(x) + (x-a)f'(a)\varepsilon_2(x) + (x-a)\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$, dat $\varepsilon_3(a) = 0$ en $\varepsilon_3(x)$ continu in a is.

Voorbeeld: Van $x^2 \sin x$ is de afgeleide $2x \sin x + x^2 \cos x$.

(4.7) Een constante functie is differentieerbaar met afgeleide 0; de identieke functie is differentieerbaar met afgeleide 1.

Opgave 34. Bewijs (4.7).

Opgave 35. Bewijs dat voor natuurlijke n geldt $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$.

Uit het resultaat van opgave 35 en uit (4.3) en (4.4) vindt men, dat de afgeleide van een polynoom $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ gelijk is aan $\sum_{k=0}^n a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$.

(4.8) Als $f(x)$ eeneenduidig en differentieerbaar is en als $f'(a) \neq 0$, dan is de omkeersfunctie $g(x)$ van $f(x)$ differentieerbaar in $f(a)$ met afgeleide $\frac{1}{f'(a)}$ (als we dus schrijven $y=f(x)$ en dus $x=g(y)$, dan is $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$).

Bewijs: Omdat $f(x)$ differentieerbaar is, is $f(x)$ op een interval gedefinieerd en continu. Uit (3.15) volgt, dat $g(x)$ op een interval gedefinieerd en continu is. Als $f(a)=b$ en $f(x)=y$ (dus $g(b)=a$ en $g(y)=x$) dan volgt uit $y \rightarrow b$, dat $x \rightarrow a$ en omgekeerd. Verder volgt uit $y \neq b$, dat $x \neq a$ en omgekeerd. Dan is $\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$.

Opmerking: De voorwaarde $f'(a) \neq 0$ is niet overbodig. Zo is $f(x)=x^3$ eeneenduidig en differentieerbaar, maar $f'(0)=0$. Stelling (4.8) kan men zich met behulp van een grafiek zeer aanschouwelijk maken (ga dat zelf na).

Voorbeeld: De functie $x^{\frac{1}{n}}$ is de omkeersfunctie van x^n . Stel n natuurlijk en $y=x^{\frac{1}{n}}$ voor $x > 0$, dan is $x=y^n$ en $\frac{dx}{dy} = ny^{n-1} = nx^{\frac{n-1}{n}}$, dus $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

(4.9) (Kettingregel) Als $g(x)$ differentieerbaar is in a , als de definitieverzameling van $f(x)$ de verzameling der functiewaarden van $g(y)$ bevat en als $f(x)$ differentieerbaar is in $g(a)$, dan is $f(g(x))$ differentieerbaar in a en $\left[\frac{df(g(x))}{dx} \right]_{x=a} = \left[\frac{df(y)}{dy} \right]_{y=g(a)} \left[\frac{dg(x)}{dx} \right]_{x=a}$ (als we dus schrijven $y = g(x)$ en $z = f(y) = f(g(x))$, dan is $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$).

Bewijs: Noem $g(a) = b$, dan is $g(x) = b + (x-a)g'(a) + (x-a)\mathcal{E}_1(x)$ met $\mathcal{E}_1(a) = 0$ en $\mathcal{E}_1(x)$ continu in a en $f(y) = f(b) + (y-b)f'(b) + (y-b)\mathcal{E}_2(y)$ met $\mathcal{E}_2(b) = 0$ en $\mathcal{E}_2(y)$ continu in b . Dan is $f(g(x)) = f(b) + (g(x)-b)f'(b) + (g(x)-b)\mathcal{E}_2(g(x)) = f(g(a)) + (x-a)g'(a)f'(b) + (x-a)(f'(b)\mathcal{E}_1(x) + g'(a)\mathcal{E}_2(g(x)) + \mathcal{E}_1(x)\mathcal{E}_2(g(x)))$. Nu geldt voor $\mathcal{E}_3(x) = f'(b)\mathcal{E}_1(x) + g'(a)\mathcal{E}_2(g(x)) + \mathcal{E}_1(x)\mathcal{E}_2(g(x))$, dat $\mathcal{E}_3(a) = 0$ en $\mathcal{E}_3(x)$ continu in a is.

Voorbeeld: Van $x^2 \sin x$ is de afgeleide $2x \sin x + x^2 \cos x$.

(4.7) Een constante functie is differentieerbaar met afgeleide 0; de identieke functie is differentieerbaar met afgeleide 1.

Opgave 34. Bewijs (4.7).

Opgave 35. Bewijs dat voor natuurlijke n geldt $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$.

Uit het resultaat van opgave 35 en uit (4.3) en (4.4) vindt men, dat de afgeleide van een polynoom $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ gelijk is aan $\sum_{k=0}^n a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$.

(4.8) Als $f(x)$ eeneenduidig en differentieerbaar is en als $f'(a) \neq 0$, dan is de omkeersfunctie $g(x)$ van $f(x)$ differentieerbaar in $f(a)$ met afgeleide $\frac{1}{f'(a)}$ (als we dus schrijven $y=f(x)$ en dus $x=g(y)$, dan is $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$).

Bewijs: Omdat $f(x)$ differentieerbaar is, is $f(x)$ op een interval gedefinieerd en continu. Uit (3.15) volgt, dat $g(x)$ op een interval gedefinieerd en continu is. Als $f(a)=b$ en $f(x)=y$ (dus $g(b)=a$ en $g(y)=x$) dan volgt uit $y \rightarrow b$, dat $x \rightarrow a$ en omgekeerd. Verder volgt uit $y \neq b$, dat $x \neq a$ en omgekeerd. Dan is $\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$.

Opmerking: De voorwaarde $f'(a) \neq 0$ is niet overbodig. Zo is $f(x)=x^3$ eeneenduidig en differentieerbaar, maar $f'(0)=0$. Stelling (4.8) kan men zich met behulp van een grafiek zeer aanschouwelijk maken (ga dat zelf na).

Voorbeeld: De functie $x^{\frac{1}{n}}$ is de omkeersfunctie van x^n . Stel n natuurlijk en $y=x^{\frac{1}{n}}$ voor $x > 0$, dan is $x=y^n$ en $\frac{dx}{dy} = ny^{n-1} = nx^{\frac{n-1}{n}}$, dus $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

(4.9) (Kettingregel) Als $g(x)$ differentieerbaar is in a , als de definitieverzameling van $f(x)$ de verzameling der functiewaarden van $g(y)$ bevat en als $f(x)$ differentieerbaar is in $g(a)$, dan is $f(g(x))$ differentieerbaar in a en $\left[\frac{df(g(x))}{dx} \right]_{x=a} = \left[\frac{df(y)}{dy} \right]_{y=g(a)} \left[\frac{dg(x)}{dx} \right]_{x=a}$ (als we dus schrijven $y = g(x)$ en $z = f(y) = f(g(x))$, dan is $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$).

Bewijs: Noem $g(a) = b$, dan is $g(x) = b + (x-a)g'(a) + (x-a)\mathcal{E}_1(x)$ met $\mathcal{E}_1(a) = 0$ en $\mathcal{E}_1(x)$ continu in a en $f(y) = f(b) + (y-b)f'(b) + (y-b)\mathcal{E}_2(y)$ met $\mathcal{E}_2(b) = 0$ en $\mathcal{E}_2(y)$ continu in b . Dan is $f(g(x)) = f(b) + (g(x)-b)f'(b) + (g(x)-b)\mathcal{E}_2(g(x)) = f(g(a)) + (x-a)g'(a)f'(b) + (x-a)(f'(b)\mathcal{E}_1(x) + g'(a)\mathcal{E}_2(g(x)) + \mathcal{E}_1(x)\mathcal{E}_2(g(x)))$. Nu geldt voor $\mathcal{E}_3(x) = f'(b)\mathcal{E}_1(x) + g'(a)\mathcal{E}_2(g(x)) + \mathcal{E}_1(x)\mathcal{E}_2(g(x))$, dat $\mathcal{E}_3(a) = 0$ en $\mathcal{E}_3(x)$ continu in a is.

Voorbeeld: Gevraagd wordt de afgeleide van $(\sin x)^n$ voor natuurlijke n . Noem $g(x) = \sin x$ en $f(y) = y^n$, dan is $g'(x) = \cos x$ en $f'(y) = ny^{n-1}$. De afgeleide van $(\sin x)^n$ is dus $n (\sin x)^{n-1} \cos x$.

(4.10) Als $g(x)$ differentieerbaar is in a en $g(a) \neq 0$, dan kan $\frac{1}{g(x)}$ gedefinieerd worden op een interval dat a bevat en is dan differentieerbaar in a en de afgeleide is $-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$.

Bewijs: Omdat $g(x)$ op een interval gedefinieerd en continu in a is en $g(a) \neq 0$, is er een interval dat a bevat waar $g(x) \neq 0$ is (zie (3.9)). De rest van het bewijs gaat eenvoudig met de kettingregel.

Opgave 36. Completeer het bewijs van (4.10).

(4.11) Het quotiënt $\frac{f(x)}{g(x)}$ van twee in a differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$ met $g(a) \neq 0$ is differentieerbaar in a met afgeleide $\frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Opgave 37. Bewijs (4.11). (Bedenk dat $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$.)

(4.12) Voor r rationaal en $x > 0$ geldt $\frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1}$.

Bewijs: Voor r natuurlijk zie opgave 35. Verder geeft $r=0$ de functie $x^0 = 1$ met afgeleide $0 = 0x^{-1}$. Voor $r = -1$ is de functie $x^{-1} = \frac{1}{x}$, maar $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{ax}$ en dit nadert tot $-\frac{1}{a^2}$ als $x \rightarrow a$ dus $\frac{dx^{-1}}{dx} = -\frac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}$.

Voor negatieve gehele r stellen we $r = -n$ en passen volledige inductie naar n toe. Voor $n=1$ is het zojuist bewezen. Stel het is voor n juist, dan is $\frac{dx^{-(n+1)}}{dx} = \frac{dx^{-n} \cdot x^{-1}}{dx} = \frac{dx^{-n}}{dx} x^{-1} + x^{-n} \frac{dx^{-1}}{dx} = -nx^{-n-1}x^{-1} + x^{-n}(-1)x^{-2} =$

$= -(n+1)x^{-(n+1)-1}$. Hiermee is het voor gehele r aangetoond. Neem nu r willekeurig rationaal en stel $r = \frac{p}{q}$ met p geheel en q natuurlijk dan is $x^r = (x^p)^{\frac{1}{q}}$. Met de kettingregel vinden we dan $\frac{d(x^p)^{\frac{1}{q}}}{dx} = \frac{1}{q}(x^p)^{\frac{1}{q}-1} px^{p-1} =$

$= \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} = rx^{r-1}$.

Opgave 38. Bewijs dat de functie $f(x)$ gedefinieerd door $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 0$ niet differentieerbaar is in 0 , maar dat de functie $g(x)$ gedefinieerd door $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$ en $g(0) = 0$ wel differentieerbaar is in 0 (vergelijk het resultaat van opgave 23).

Opgave 39. Bepaal de afgeleiden van $\frac{1}{1+x^2}$, $\sqrt{x^2+1}-x$, $\operatorname{tg} x$, $(\sin x)^3 +$
 $- 3 \sin x$, $x \sin \frac{1}{x}$, $x^2 \cos \frac{1}{x}$, $\frac{1-\cos x}{\sin x}$, $\sin(1 + \sqrt{1+\cos x^2})$.

Als $f(x)$ differentieerbaar is, is de afgeleide $f'(x)$ weer een functie van x ; als deze differentieerbaar is (in a), dan zeggen we dat $f(x)$ twee maal differentieerbaar is (in a) en noemen we de afgeleide van $f'(x)$ de

tweede afgeleide van $f(x)$: $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$. Analooft definieert men voor natuurlijke n de n^{e} afgeleide van $f(x)$: $\frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ door volledige

inductie, mits zij bestaat. Het getal n heet de orde van de afgeleide. Het is voor sommige doeleinden praktisch de functie $f(x)$ als zijn eigen nulde afgeleide te beschouwen: $f^{(0)}(x) = f(x)$. Als de n^{e} afgeleide van $f(x)$ bestaat voor alle natuurlijke n , dan heet $f(x)$ willekeurig vaak (of oneindig vaak) differentieerbaar.

Opgave 40. Bepaal de n^{e} afgeleide van $(1+x)^r$, $\sin x$, $\cos x$.

Voor de n^{e} afgeleide van een product van twee n maal differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$ bestaat een formule, die formeel als volgt te vinden is: ontwikkel $(f(x)+g(x))^n$ volgens de binomiaalformule van Newton en vervang de machten door afgeleiden van overeenkomstige orde. Dit geeft:

(4.13) (Regel van Leibniz) Als $f(x)$ en $g(x)$ beide n maal differentieerbaar zijn, geldt

$$\frac{d^n f(x)g(x)}{dx^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Bewijs: We passen volledige inductie naar n toe. Voor $n = 1$ komt er juist de formule van (4.6). Stel de formule geldt voor n . Dan is

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1} f(x)g(x)}{dx^{n+1}} &= \frac{d}{dx} \frac{d^n f(x)g(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d}{dx} (f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \\ &+ f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + \\ &+ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x). \end{aligned}$$

Bij deze af-

leiding is gebruik gemaakt van de volgende uit de algebra bekende betrekkingen tussen binomiaalcoëfficiënten: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ voor $k=1, \dots, n$;

$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ (zie Elal blz. 7).

Opgave 41. Bepaal van $x^{a+b} = x^a x^b$ de n^{e} afgeleide en wel voor het linkerlid rechtstreeks en voor het rechterlid met de regel van Leibniz en bewijs met behulp daarvan dat $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$ (vergelijk Elal blz. 9, opgave 4).

Een functie $f(x)$ gedefinieerd op een interval I heet stijgend in a als er een getal $\lambda > 0$ bestaat zodat voor x in I , $a - \lambda < x < a$ geldt $f(x) < f(a)$ en voor x in I , $a < x < a + \lambda$ geldt $f(x) > f(a)$. Analooft dalend met $f(x) > f(a)$ en $f(x) < f(a)$, niet-dalend met $f(x) \leq f(a)$ en

$f(x) \geq f(a)$, niet-stijgend met $f(x) \geq f(a)$ en $f(x) \leq f(a)$. We zeggen verder dat $f(x)$ een relatief maximum (resp. relatief minimum) in a heeft, als er een getal $\lambda > 0$ bestaat zodat voor x in I en $|x-a| < \lambda$ geldt $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Deze eigenschappen zijn plaatselijke eigenschappen: alleen argumentwaarden in de buurt van a spelen een rol.

De volgende stelling is evident.

(4.14) Als de op een interval gedefinieerde functie $f(x)$ een maximum (resp. minimum) in a heeft, heeft zij ook een relatief maximum (resp. minimum) in a .

We leggen nu een verband tussen de hierboven gedefinieerde eigenschappen en de differentieerbaarheid.

(4.15) Als de in a differentieerbare functie $f(x)$ in a niet-dalend (resp. niet-stijgend) is, is $f'(a) \geq 0$ (resp. $f'(a) \leq 0$).

Bewijs: Voor $|x-a| < \lambda$ is $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (resp. ≤ 0).

(4.16) Als de functie $f(x)$ in a differentieerbaar is en $f'(a) > 0$ (resp. $f'(a) < 0$), dan is $f(x)$ in a stijgend (resp. dalend).

Bewijs: We beschouwen het geval $f'(a) > 0$ (het andere geval gaat analoog). Er is een $\lambda > 0$ te vinden zodat uit $|x-a| < \lambda$ en $x \neq a$ volgt $\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < f'(a)$, dus $f'(a) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a)$, dus $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ dus voor $a - \lambda < x < a$ geldt $f(x) < f(a)$ en voor $a < x < a + \lambda$ geldt $f(x) > f(a)$.

Het verschil in de voorwaarden van (4.15) en (4.16) (die in zekere zin als elkaars omkeringen te beschouwen zijn) is essentieel; zo kan voor een functie $f(x)$, die stijgend is in a , toch gelden $f'(a) = 0$. B.v. x^3 is stijgend in 0 , maar $3x^2$ is daar nul.

(4.17) Als de functie $f(x)$ differentieerbaar is, als a geen randpunt van het definitie-interval is en als $f(x)$ een relatief maximum of relatief minimum in a heeft is $f'(a) = 0$.

Bewijs: Stel dat $f(x)$ in a een relatief maximum heeft (het andere geval gaat analoog). Omdat a geen randpunt is van het definitie-interval I van $f(x)$ is er een $\mu > 0$, zodat $(a-\mu, a+\mu)$ geheel tot I behoort. Verder is er een $\lambda > 0$ zodat voor x in I en $|x-a| < \lambda$ geldt $f(x) \leq f(a)$. Omdat voor $x < a$ geldt $x-a < 0$, is $f'(a) = \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ en omdat voor $x > a$ geldt $x-a > 0$, is $f'(a) = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. Uit $f'(a) \geq 0$ en $f'(a) \leq 0$ volgt $f'(a) = 0$.

Het omgekeerde van (4.17) geldt niet: van x^3 is de afgeleide in 0 gelijk aan nul, maar de functie heeft daar noch een relatief maximum noch een relatief minimum. Desondanks is de stelling nuttig om de relatieve maxima en minima op te sporen. Kan men n.l. van een functie alle punten be-

palen, waar de afgeleide nul is, dan komen zeker onder deze punten alle eventuele relatieve maxima en minima voor (behalve eventueel de randpunten van het definitie-interval), naast eventueel nog andere punten.

De volgende stelling is evident.

(4.18) Als een op een interval gedefinieerde functie monotoon stijgend (resp. dalend, niet-dalend, niet-stijgend) is, is zij in ieder punt van haar definitie-interval stijgend (resp. dalend, niet-dalend, niet-stijgend).

Door combinatie van (4.18) en (4.15) vindt men:

(4.19) Als de differentieerbare functie $f(x)$ isotoon (resp. antitoon) is, is $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) voor alle x in het definitie-interval.

Om te bewijzen, dat uit $f'(x) > 0$ volgt dat $f(x)$ streng isotoon is, hebben we nieuwe hulpmiddelen nodig.

(4.20) (Stelling van Rolle) Als de functie $f(x)$ gedefinieerd en continu is in $[a, b]$ en differentieerbaar in (a, b) en als $f(a) = f(b) = 0$, dan is er een ξ in (a, b) , zodat $f'(\xi) = 0$.

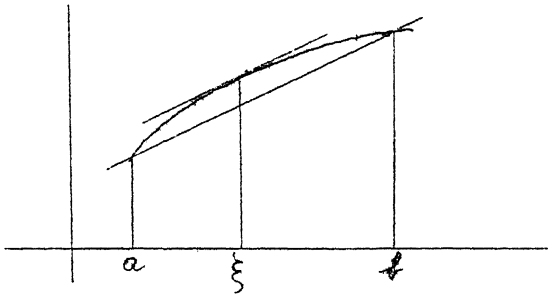
Bewijs: Volgens (3.12) heeft $f(x)$ een maximum en een minimum. Wegens $f(a) = 0$ is het maximum ≥ 0 en het minimum ≤ 0 . Als ze beide nul zijn is de functie $f(x)$ overal nul, maar dan is $f'(x)$ ook overal nul, dus is ξ nog willekeurig te kiezen in (a, b) . Als het maximum en het minimum niet beide nul zijn, is minstens één van beide $\neq 0$, dus wegens $f(a) = 0$, het maximum > 0 of het minimum < 0 (of beide). Stel het maximum is > 0 (het andere geval gaat analoog), dan is een punt ξ waar $f(x)$ maximaal is niet a of b want $f(a) = f(b) = 0$. Dus ξ is geen randpunt van het interval. Uit (4.17) volgt nu dat $f'(\xi) = 0$.

We gaan nu uit van twee functies $f(x)$ en $g(x)$ beide gedefinieerd en continu in $[a, b]$ en differentieerbaar in (a, b) en onderstellen verder $g(a) \neq g(b)$. Voor de functie $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$ geldt dan eveneens dat zij gedefinieerd en continu is in $[a, b]$ en differentieerbaar in (a, b) . Verder is $h(a) = h(b) = 0$. Op $h(x)$ kunnen we dus de stelling van Rolle toepassen; er bestaat dus een ξ in (a, b) zodat $0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$. Als nu $g'(\xi) = 0$, dan is ook $f'(\xi) = 0$; is echter $g'(\xi) \neq 0$, dan is $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Dit levert ons de volgende stelling:

(4.21) (Gegeneraliseerde middelwaardestelling van de differentiaalrekening) Als de functies $f(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd en continu zijn in $[a, b]$ en differentieerbaar in (a, b) en als $g(a) \neq g(b)$, dan is er een ξ in (a, b) , zodat geldt $f'(\xi) = g'(\xi) = 0$ of $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Kiest men speciaal $g(x) = x$, dan is $g'(x) = 1 \neq 0$; we vinden dan de volgende stelling:

(4.22) (Middelwaardestelling van de differentiaalrekening) Als de functie $f(x)$ gedefinieerd en continu is in $[a, b]$ en differentieerbaar in (a, b) , dan is er een ξ in (a, b) , zodat geldt $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.



Meetkundig geïnterpreteerd geeft dit het volgende: bij een koorde van een grafiek van een differentieerbare functie is een daarmee evenwijdige raaklijn in een punt tussen de punten, waartussen de koorde getrokken is.

(4.23) Als van een differentieerbare functie $f(x)$ de afgeleide nul is in het gehele definitie-interval, is de functie constant.

Bewijs: Kies twee verschillende getallen x en y in het definitie-interval. Volgens de middelwaardestelling van de differentiaalrekening is er een ξ tussen x en y , waarvoor $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi)$, maar $f'(\xi) = 0$, dus $f(x) = f(y)$. De functie is dus constant.

(4.24) Als voor twee differentieerbare functies $f(x)$ en $g(x)$, die op hetzelfde interval gedefinieerd zijn, geldt $f'(x) = g'(x)$ voor alle x in het definitie-interval, dan is er een getal c , zodat $g(x) = f(x) + c$ voor alle x in het definitie-interval.

Bewijs: Voor $h(x) = g(x) - f(x)$ geldt $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$. Op $h(x)$ kunnen we dus (4.23) toepassen; dit geeft $h(x) = c$, dus $g(x) = f(x) + c$.

We drukken (4.24) ook zo uit: een differentieerbare functie is door zijn afgeleide op een additieve constante na bepaald, d.w.z. een andere functie met dezelfde afgeleide heeft met de oorspronkelijke functie een constant verschil.

We keren nu terug tot het verband tussen de monotonie van een functie en het teken van haar afgeleide.

(4.25) Als voor de differentieerbare functie $f(x)$ geldt, dat $f'(x) \neq 0$ voor alle x in het definitie-interval, dan is $f(x)$ eeneenduidig en dus streng monotoon en dan heeft $f'(x)$ overal hetzelfde teken.

Bewijs: Stel dat $f(x)$ niet eeneenduidig is; dan zijn er twee getallen c en d in het definitie-interval zodat $c \neq d$ en $f(c) = f(d)$. Volgens de middelwaardestelling van de differentiaalrekening is er dan een ξ tussen c en d zodat $f'(\xi) = \frac{f(c)-f(d)}{c-d}$, dus, wegens $f(c) = f(d)$, $f'(\xi) = 0$. Dit is in strijd met het feit, dat $f'(x) \neq 0$ voor alle x in het definitie-interval. Dus $f(x)$ is eeneenduidig. Uit (4.2) en (3.14) volgt dan, dat $f(x)$ streng monotoon is en vervolgens uit (4.19), dat hetzij $f(x) \geq 0$ voor alle x in het definitie-interval, hetzij $f(x) \leq 0$ voor alle x in het definitie-interval, maar $f(x) \neq 0$, dus $f(x)$ heeft in het definitie-interval overal hetzelfde teken.

Uit (4.25) volgt direct:

(4.26) Als van een differentieerbare functie $f(x)$ de afgeleide ergens negatief en ergens positief is, is de afgeleide ergens nul.

Dit lijkt enigszins op de middelwaardestelling van Weierstrass (3.10) toegepast op $f'(x)$. Men zou kunnen denken, dat dit komt omdat de afgeleide van een differentieerbare functie altijd continu zou zijn. Dit is evenwel niet het geval; zie opgave 42.

Opgave 42. De functie $f(x)$ gedefinieerd door $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 0$ is differentieerbaar. De afgeleide is niet begrensd (dus niet continu) op $[0,1]$. Van de functie $g(x)$ gedefinieerd door $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$ en $g(0) = 0$ (die, zoals in opgave 38 is aangetoond, differentieerbaar is) is de afgeleide wel begrensd op $[-1,1]$, maar niet continu in 0.

Als een functie differentieerbaar is en de afgeleide is continu, dan noemt men de functie continu differentieerbaar.

Opgave 43. De afstand van een punt (x,y) tot de oorsprong is $\sqrt{x^2+y^2}$. De cirkel met middelpunt in de oorsprong en straal r heeft dus $x^2+y^2=r^2$ als vergelijking. De grafiek van de functie $\sqrt{r^2-x^2}$ is dus het gedeelte van de cirkel boven of op de X-as gelegen. Bepaal met behulp van differentiaalrekening de raaklijn aan de grafiek van deze functie in een punt van de grafiek en bewijs dat deze raaklijn loodrecht staat op de verbindinglijn van het punt en de oorsprong.

§ 5. Onbepaalde en bepaalde integralen.

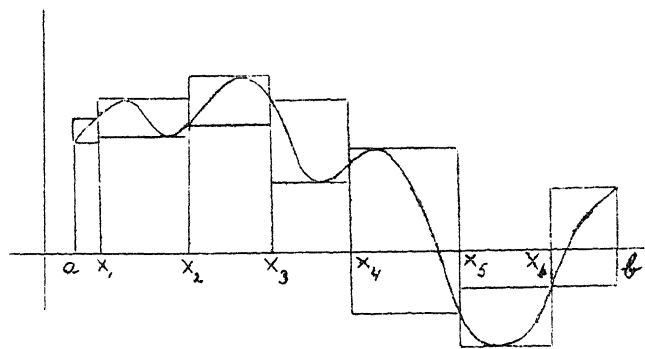
In de vorige paragraaf hebben we ons bezig gehouden met differentiëren, dus met het vinden van de afgeleide van een functie. We kunnen nu ook het omgekeerde probleem stellen, n.l. gegeven een functie $f(x)$, gezocht een functie $F(x)$, zodat geldt $F'(x) = f(x)$. We noemen dan $F(x)$ een stamfunctie of een primitieve functie van $f(x)$. We hebben al gevonden, in hoeverre $F(x)$ door $f(x)$ bepaald is, n.l. in (4.24): als de op een interval gedefinieerde functie $f(x)$ een stamfunctie $F(x)$ bezit, dan zijn die en slechts die functies $G(x)$ stamfuncties van $f(x)$ waarvoor geldt $G(x) = F(x) + C$. Hiermee is natuurlijk nog niets gezegd over de vraag of een gegeven functie een stamfunctie bezit.

Als $f(x)$ een op een interval gedefinieerde continue functie is noemen we een stamfunctie van $f(x)$ ook wel een onbepaalde integraal en schrijven deze $\int f(x)dx$. Dit symbool stelt dus een functie voor die slechts op een additieve constante na bepaald is. We zullen later bewijzen, dat iedere op een interval gedefinieerde continue functie een stamfunctie bezit, zodat dan zal blijken dat voor al deze functies het symbool $\int f(x)dx$ zinvol is.

We kunnen stamfuncties van allerlei functies vinden, door een lijst van allerlei differentieerbare functies met hun afgeleiden op te stellen. We moeten dan natuurlijk maar afwachten of een gegeven functie inderdaad op de lijst onder de afgeleiden blijkt voor te komen. Een meer systematische behandeling van deze kwestie voeren we later nog uit. We kunnen zo b.v. direct opschrijven $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ $\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$ voor r rationaal en $\neq -1$.

Er is echter een andere methode om bij een functie een stamfunctie te vinden en dat is met behulp van z.g. bepaalde integralen. Deze gaan we daarom eerst behandelen.

Laat $f(x)$ een begrensde functie zijn, gedefinieerd op een begrensd open interval (a,b) . We kiezen $k+1$ getallen $x_0, x_1, \dots, x_k$ zodat geldt $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$. Dit noemen we een verdeling V van het



interval (a,b) . De x_j ($j = 0, \dots, k$) noemen we de deelpunten van de verdeling. Het grootste van de getallen $x_j - x_{j-1}$ ($j = 1, \dots, k$) noemen we de diameter $d(V)$ van de verdeling:

$d(V) = \max_{1 \leq j \leq k} (x_j - x_{j-1})$. Het aantal deelpunten van verschillende verdelingen mag verschillend zijn. We bepalen

nu

$$S_V^*(f) = \sum_{j=0}^k (x_j - x_{j-1}) \sup_{x_{j-1} < \xi < x_j} f(\xi) \quad \text{en}$$

$$S_{*V}(f) = \sum_{j=0}^k (x_j - x_{j-1}) \inf_{x_{j-1} < \xi < x_j} f(\xi), \quad \text{genaamd de } \underline{\text{bovensom}}$$

resp. benedensom van $f(x)$ behorende bij de verdeling V . Bezien we dit in de grafiek, dan zien we dat zowel bovensom als benedensom een som is van oppervlakten van rechthoekjes, als in de figuur aangegeven (als $f(x)$ wel eens negatief wordt worden er sommige oppervlakten negatief geteld!) Onze verwachting is nu, dat als we de deelpunten van de verdeling steeds dichter bij elkaar kiezen (d.w.z. de diameter van de verdelingen naar nul laten gaan), dit zal naderen tot iets dat we de oppervlakte van het gedeelte van het platte vlak gelegen tussen de grafiek en de X -as zullen noemen. We gaan nu na, in hoeverre deze verwachting in vervulling gaat.

Het is duidelijk dat $S_{*V}(f) \leq S_V^*(f)$. Verder is $f(x)$ begrensd; laat

$$C_1 \leq f(x) \leq C_2 \quad \text{zijn. Dan is } C_1(b-a) = \sum_{j=0}^k (x_j - x_{j-1}) C_1 \leq$$

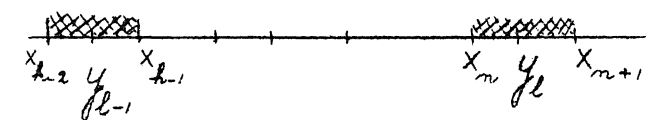
$$< \sum_{j=0}^k (x_j - x_{j-1}) \sup_{x_{j-1} < \xi < x_j} f(\xi) \leq \sum_{j=0}^k (x_j - x_{j-1}) \sup_{a < x < b} f(x) \leq$$

Deze bladzijde komt in de plaats van de eerder uitgegeven blz. 39, welke vernietigd kan worden.

$\leq \sum_{j=0}^k (x_j - x_{j-1}) C_2 = C_2(b-a)$, dus $C_1(b-a) \leq S_V^*(f) \leq C_2(b-a)$ en op analoge wijze ook $C_1(b-a) \leq S_{*V}(f) \leq C_2(b-a)$.

De verzameling van waarden, die $S_V^*(f)$ voor alle mogelijke verdelingen (steeds bij dezelfde functie f) kan aannemen, is naar beneden begrensd (steeds $\geq C_1(b-a)$) en bezit dus een onderste grens S^* . Bij een $\varepsilon > 0$ is er dan een verdeling W te vinden, zodat $S^* \leq S_W^*(f) < S^* + \frac{1}{2}\varepsilon$. Laat $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$ de verdeling W zijn en noem $d' = \min_{1 \leq l \leq m} (y_l - y_{l-1})$. Laat verder $|f(x)| \leq C$ zijn. Kies $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{2(3k+1)(C+1)}, \frac{1}{2}d')$. Neem nu een willekeurige verdeling V met diameter $< \delta$. Laat $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ de verdeling V zijn, dan is $x_j - x_{j-1} < \delta$ voor $j=1, \dots, k$. Stel nu voor $1 \leq l \leq m$, dat h zo bepaald is, dat $x_{h-2} \leq y_{l-1} < x_{h-1}$. Dan is $x_{h-1} < x_{h-2} + \delta \leq y_{l-1} + \delta < y_{l-1} + d' \leq y_l \leq b$, dus $h-1 < k$, dus $h \leq k$. Verder is $x_h < x_{h-2} + 2\delta \leq y_{l-1} + 2\delta \leq y_{l-1} + d' \leq y_l$. Een open intervalletje (y_{l-1}, y_l) van de verdeling W bevat dus ten minste twee deelpunten van de verdeling V . Stel nu, dat $x_{h-2} \leq y_{l-1} < x_{h-1} < \dots < x_n < y_l \leq x_{n+1}$, dan is op grond van het bovenstaande $n \geq h$.

$$\begin{aligned} \text{Nu is } \sum_{j=h}^n (x_j - x_{j-1}) \sup_{x_{j-1} < \xi < x_j} f(\xi) &\leq \\ &\leq \sum_{j=h}^n (x_j - x_{j-1}) \sup_{y_{l-1} < \xi < y_l} f(\xi) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= (x_n - x_{h-1}) \sup_{y_{l-1} < \xi < y_l} f(\xi) = (y_l - y_{l-1}) \sup_{y_{l-1} < \xi < y_l} f(\xi) + (x_{h-1} - y_{l-1}) \sup_{y_{l-1} < \xi < y_l} f(\xi) \\ &- (y_l - x_n) \sup_{y_{l-1} < \xi < y_l} f(\xi) \leq (y_l - y_{l-1}) \sup_{y_{l-1} < \xi < y_l} f(\xi) + 2\delta C. \end{aligned}$$

In $S_V^*(f)$ zonderen we eerst de termen af behorende bij een intervalletje, dat een deelpunt van de verdeling W bevat, benevens de eerste en de laatste term. Dat zijn $k+1$ termen, die elk $\leq \delta C$ zijn. De andere termen nemen we in groepjes bij elkaar; elk groepje bevat die termen die behoren bij een intervalletje, dat binnen één vast intervalletje van de verdeling W ligt, zoals boven is beschouwd. Dan geldt blijkbaar $S^* \leq S_V^*(f) \leq S_W^*(f) + 2k\delta C + (k+1)\delta C < S^* + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = S^* + \varepsilon$. Bij $\varepsilon > 0$ hebben we dus een $\delta > 0$ gevonden zodat voor iedere verdeling V met diameter $< \delta$ geldt $0 \leq S_V^*(f) - S^* < \varepsilon$. Nemen we een rij verdelingen V_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} d(V_n) = 0$, dan is bij δ een N te vinden zodat voor $n > N$ geldt $d(V_n) < \delta$, dus $|S^* - S_{V_n}^*(f)| < \varepsilon$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{V_n}^*(f) = S^*$. Wij hebben dus gevonden:

(5.1) Als de functie $f(x)$ begrensd en op (a, b) gedefinieerd is, convergeert voor iedere rij verdelingen V_n van (a, b) met $\lim_{n \rightarrow \infty} d(V_n) = 0$, de rij $S_{V_n}^*(f)$ naar dezelfde limiet.

De limiet in (5.1) noemen we de bovenintegraal $\int_a^b f(x) dx$. We hebben bovendien gevonden:

(5.2) Als $f(x)$ een begrensde functie is, gedefinieerd op (a, b) , dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden zodat voor iedere verdeling W van (a, b) met diameter $< \delta$ geldt $0 \leq S_W^*(f) - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon$.

(5.3) Als $f(x)$ een begrensde functie is, gedefinieerd op (a,b) en $C_1 \leq f(x) \leq C_2$, dan geldt $C_1(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq C_2(b-a)$.

Voor benedensommen kunnen we een volledig analoge beschouwing geven. We werken dan met de bovenste grens S_* en vinden een benedenintegraal $\int_a^b f(x) dx$ en daarvoor stellingen analoog aan (5.1), (5.2) en (5.3) (in het analogon van (5.2) komt $0 \leq \int_a^b f(x) dx - S_{*W}(f) < \varepsilon$).

De boven- en de benedenintegraal van een functie behoeven niet gelijk te zijn. Voorbeeld: $f(x)$ gedefinieerd op $(0,1)$ en $= 0$ voor irrationale x en $= 1$ voor rationale x . Daar in ieder intervalletje rationale en irrationale getallen liggen ((1.39) en (1.40)) is, voor iedere verdeling V , $S_V^*(f) = 1$ en $S_{*V}(f) = 0$, dus $\int_0^1 f(x) dx = 1$ en $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Steeds geldt natuurlijk:

$$(5.4) \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Als voor een begrensde functie $f(x)$ gedefinieerd op (a,b) geldt, dat $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$, heet $f(x)$ integreerbaar en de bovenintegraal = benedenintegraal van $f(x)$ heet de (bepaalde) integraal van $f(x)$. Deze wordt geschreven $\int_a^b f(x) dx$. We noemen a de ondergrens en b de bovengrens van de integraal. Men verwarre niet bepaalde en onbepaalde integraal: de onbepaalde integraal is een functie, de bepaalde integraal is een getal.

Als $f(x)$ integreerbaar is op (a,b) , kan men de integraal ook krijgen in plaats van als limiet van boven- of benedensommen, als limiet van sommen waarin in elke term niet de bovenste of de onderste grens van $f(x)$ in het intervalletje maar een of andere waarde van $f(x)$ in dat intervalletje genomen wordt. Laat nl. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ een verdeling V zijn en ξ_j ($j = 1, \dots, k$) getallen met $x_{j-1} < \xi_j < x_j$ en noem $S_V(f) =$

$$= \sum_{j=1}^k (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j), \text{ dan geldt blijkbaar } S_{*V}(f) \leq S_V(f) \leq S_V^*(f).$$

Nemen we nu een rij verdelingen V_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} d(V_n) = 0$, dan is, omdat $f(x)$ integreerbaar is $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{*V_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{V_n}^*(f)$. Hieruit volgt dan dat ook

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{V_n}(f) \text{ bestaat en } = \int_a^b f(x) dx.$$

Als $f(x)$ gedefinieerd is op (a,b) en begrensd is en c is een getal tussen a en b , dan kunnen we het definitie-interval van $f(x)$ tot (a,c) beperken en zo $\int_a^c f(x) dx$ verkrijgen en evenzo $\int_c^b f(x) dx$. Er geldt dan:

(5.5) Als $f(x)$ een begrensde functie is, gedefinieerd op (a,b) en c ligt tussen a en b , dan geldt $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (en analoog voor benedenintegralen).

Bewijs: Kies een rij verdelingen V_n van (a,b) , zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} d(V_n) = 0$ en zodat c een deelpunt van iedere verdeling V_n is. Dan geeft V_n tevens een verdeling U_n van (a,c) en W_n van (c,b) . Het is dan direct duidelijk dat $S_{V_n}^*(f) = S_{U_n}^*(f) + S_{W_n}^*(f)$. Daar $\lim_{n \rightarrow \infty} d(U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(W_n) = 0$ vinden we direct $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

We definiëren nu $\int_a^b f(x)dx$ ook als $a \geq b$ is en wel door $\int_a^a f(x)dx = 0$ en voor $a > b$ door $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$. Analoog voor benedenintegralen en integralen. Het blijkt dan dat de formule in (5.5) geldig blijft, ongeacht de onderlinge ligging van a , b en c (mits natuurlijk $f(x)$ tussen a en b , tussen b en c en tussen a en c gedefinieerd is). Laat b.v. $a < b < c$ zijn. Dan is

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx, \text{ dus } \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \end{aligned}$$

We gaan niet alle gevallen na.

Nu is in (5.3) uiteraard verondersteld $a < b$. We kunnen dan ook schrijven $C_1 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq C_2$ en dit is ook geldig voor $a > b$, immers:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{a-b} \int_b^a f(x)dx. \text{ Als } |f(x)| \leq C, \text{ dan volgt hieruit direct}$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq C|b-a|, \text{ hetgeen ook voor } a = b \text{ geldt. Analoge betrekkingen gelden ook voor de benedenintegraal.}$$

Als $f(x)$ begrensd is en gedefinieerd op (a,b) en $a \leq c \leq b$ dan is $\int_c^y f(x)dx$ voor $a \leq y \leq b$ op te vatten als een functie van y ; $F^*(y) = \int_c^y f(x)dx$: een bovenintegraalfunctie van $f(x)$. Analoog $\int_c^y f(x)dx = F_*(y)$, een benedenintegraalfunctie van $f(x)$. Ze hangen beide nog van de keuze van c af. Uiteraard is $F^*(c) = F_*(c) = 0$. Verder zijn beide functies continu want $|F^*(y) - F^*(d)| = \left| \int_c^y f(x)dx - \int_c^d f(x)dx \right| = \left| \int_d^y f(x)dx \right| \leq C|y-d|$ als $|f(x)| \leq C$. Bij $\varepsilon > 0$ kiezen we $\delta = \frac{\varepsilon}{C+1}$, dan volgt uit $|y-d| < \delta$, dat

$|F^*(y) - F^*(d)| < \varepsilon$. Analoog voor $F_*(y)$. Onderstellen we nu verder $f(x)$ continu in d , dan is $\frac{F^*(d+h) - F^*(d)}{h} = \frac{1}{h} \int_d^{d+h} f(x) dx$ en $\min_{x \text{ tussen } d \text{ en } d+h} f(x) \leq$
 $\leq \frac{1}{h} \int_d^{d+h} f(x) dx \leq \max_{x \text{ tussen } d \text{ en } d+h} f(x)$. Bij $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden zodat
 uit $|x-d| < \delta$ volgt $|f(x) - f(d)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Als dan $|h| < \delta$ is, geldt voor x
 tussen d en $d+h$ zeker $|x-d| < \delta$ dus $-\frac{1}{2}\varepsilon < f(x) - f(d) < \frac{1}{2}\varepsilon$ dus $-\varepsilon < -\frac{1}{2}\varepsilon \leq$
 $\leq \min_{x \text{ tussen } d \text{ en } d+h} f(x) - f(d) \leq \max_{x \text{ tussen } d \text{ en } d+h} f(x) - f(d) \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, dus $-\varepsilon <$
 $< \frac{1}{h} \int_d^{d+h} f(x) dx - f(d) < \varepsilon$, dus $\left[\frac{dF^*(y)}{dy} \right]_{y=d} = f(d)$. Op analoge wijze vinden
 we $\left[\frac{dF_*(y)}{dy} \right]_{y=d} = f(d)$. Als dus $f(x)$ continu is, is $\frac{dF^*(y)}{dy} = \frac{dF_*(y)}{dy} = f(y)$

Dan zijn dus $F^*(y)$ en $F_*(y)$ beide stamfuncties van $f(y)$, dus, volgens (4.24), is er een constante C_3 , zodat $F^*(y) = F_*(y) + C_3$. Door substitutie van $y = c$ vinden we echter dat $C_3 = 0$, dus $F^*(y) = F_*(y)$, dus $f(x)$ is integreerbaar over ieder begrensde interval, waarvan de randpunten in $[a, b]$ liggen. Dit geeft ons de volgende stelling:

(5.6) Een op een begrensde interval gedefinieerde, begrensde continue functie is integreerbaar.

Stel nu $f(x)$ een op een (niet noodzakelijk begrensde) interval I gedefinieerde (niet noodzakelijk begrensde) continue functie; kies een getal c , dat in I ligt. Voor ieder getal y in I geldt dan echter dat $f(x)$ begrensd is op $[c, y]$ als $y > c$ en op $[y, c]$ als $y < c$. Volgens (5.6) bestaat dus $\int_c^y f(x) dx = F(y)$, een integraalfunctie van $f(x)$. Deze integraalfunctie is echter volgens het bovenstaande een stamfunctie van $f(x)$. Hiermee hebben we gevonden:

(5.7) Een op een interval gedefinieerde continue functie bezit een stamfunctie en wel is een integraalfunctie van de gegeven functie zo'n stamfunctie.

Als omgekeerd $G(x)$ een willekeurige stamfunctie is van de op een interval gedefinieerde continue functie $f(x)$, dan is er een constante C zodat $\int_c^y f(x) dx = G(y) + C$. Substitueren we hierin $y = c$, dan vinden we dat $C = -G(c)$. Dit geeft ons de volgende stelling:

(5.8) Als $G(x)$ een willekeurige stamfunctie is van de op een interval gedefinieerde continue functie $f(x)$ en a en b zijn getallen uit het definitie-interval van $f(x)$, dan is $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$.

Met behulp van (5.8) kunnen we dus de bepaalde integraal vinden van een functie waarvan een onbepaalde integraal bekend is.

Als toepassing hiervan nemen we de functie $\frac{1}{x}$ gedefinieerd op $(0, +\infty)$ die daar inderdaad continu is. De integraalfunctie $\int_1^y \frac{dx}{x}$ is dus ook op $(0, +\infty)$ gedefinieerd en heeft $\frac{1}{y}$ als afgeleide. Deze functie noemen we de (natuurlijke) logarithme van y en schrijven we $\log y$ (men schrijft ook wel $\ln y$). Dus

$$(5.9) \quad \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Uit de definitie van $\log x$ volgt direct, dat $\log 1 = 0$. Verder geldt voor een $a > 0$, dat $\frac{d \log ax}{dx} = \frac{1}{x}$, dan is er een constante C , zodat $\log ax = \log x + C$. Substitueren we hierin $x = 1$, dan vinden we $C = \log a$, dus

$$(5.10) \quad \log xy = \log x + \log y.$$

De logarithme van een product is dus de som van de logarithmen. Men kan dus zeggen dat door het nemen van logarithmen vermenigvuldiging van getallen in optelling wordt omgezet. Dit kan men gebruiken ter vereenvoudiging van numerieke berekeningen.

Uit (5.10) volgt direct dat $\log x^n = n \log x$ voor natuurlijke n en $\log \frac{1}{x} = -\log x$. Verder is $1 = \left[\frac{d \log x}{dx} \right]_{x=1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n}) - \log 1}{1 + \frac{1}{n} - 1} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log(1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{1}{n})^n = \log \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \log e$. Dus

$$(5.11) \quad \log e = 1.$$

Verder is, als n natuurlijk is, $\log 2^{2n} = \int_1^{2^{2n}} \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{2n} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{dx}{x} \geq$
 $\geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2^k} (2^k - 2^{k-1}) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2} = n$. Omdat $\log x$ continu en op een interval gedefinieerd is, is de verzameling der functiewaarden van $\log x$ weer een interval (3.11). Volgens het bovenstaande bevat dit interval getallen $\geq n$ voor iedere natuurlijke n en, omdat $\log \frac{1}{x} = -\log x$, ook getallen $\leq -n$ voor iedere natuurlijke n . Het interval is dus $(-\infty, +\infty)$. Daar de afgeleide van $\log x$ positief is (zie (5.9)) is $\log x$ streng isotoon, dus bezit $\log x$, volgens (3.15), een streng isotone, continue omkeersfunctie, die gedefinieerd is voor alle reële getallen. We noemen deze functie voorlopig $E(x)$, dan is $\log E(x) = x$ voor alle reële x , $E(\log x) = x$ voor alle $x > 0$, $E(x) > 0$ voor alle reële x , $E(1) = e$ en $E(0) = 1$. Verder is $\log(E(u)E(v)) = \log E(u) + \log E(v) = u+v$, dus $E(u+v) = E(\log(E(u)E(v))) = E(u)E(v)$.

Bij een willekeurig getal $a > 0$ beschouwen we nu de functie $E(x \log a)$ die we voorlopig met $a^*(x)$ zullen aanduiden. Hiervoor geldt $a^*(x) a^*(y) = E(x \log a) E(y \log a) = E(x \log a + y \log a) = E((x+y) \log a) = a^*(x+y)$ en $(a^*(x))^*(y) = E(y \log a^*(x)) = E(y \log E(x \log a)) = E(yx \log a) = a^*(xy)$. We bewijzen nu dat voor rationale x geldt $a^*(x) = a^x$.

Allereerst voor natuurlijke x door volledige inductie: $a^*(1) = E(\log a) = a = a^1$; als $a^*(n) = a^n$, dan is $a^*(n+1) = a^*(n)a^*(1) = a^n a = a^{n+1}$. Verder is $a^*(0) = E(0) = 1 = a^0$. Als n geheel < 0 is, stellen we $n = -m$, dan is m natuurlijk en $1 = a^*(0) = a^*(m+n) = a^*(m)a^*(n) = a^m a^*(n)$, dus $a^*(n) = \frac{1}{a^m} = a^n$. Stel tenslotte r willekeurig rationaal en $r = \frac{p}{q}$ met p en q geheel, dan is $(a^{\frac{p}{q}})^q = a^p = a^*(p) = a^*(\frac{p}{q}q) = (a^*(\frac{p}{q}))^*(q) = (a^*(\frac{p}{q}))^q$, dus $a^*(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}}$. We definiëren voor $a > 0$ en willekeurige reële b nu $a^b = E(b \log a)$, dan stemt dit volgens het bovenstaande voor rationale b met de oude definitie overeen. Verder is $e^x = E(x \log e) = E(x)$, dus $a^b = e^{b \log a}$, $e^{\log x} = x$ en $\log e^x = x$. Dus:

(5.12) De functies $\log x$ en e^x zijn elkaars omkeersfuncties.

(5.13) Voor iedere $a > 0$ is a^x een continue monotone functie en wel streng isotoon voor $a > 1$, streng antitoon voor $a < 1$ en constant voor $a = 1$.

Opgave 44. Bewijs (5.13).

(5.14) Voor a en b reëel > 0 en x en y reëel geldt:

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y}, \\ (a^x)^y &= a^{xy}, \\ a^x b^x &= (ab)^x. \end{aligned}$$

Van deze drie betrekkingen zijn de eerst en de tweede hierboven, in de notatie met $*$, bewezen.

Opgave 45. Bewijs de derde betrekking van (5.14).

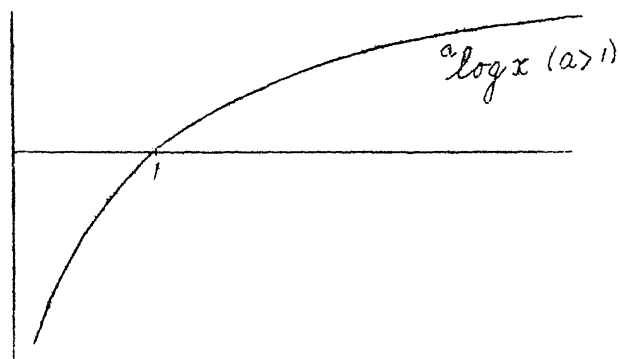
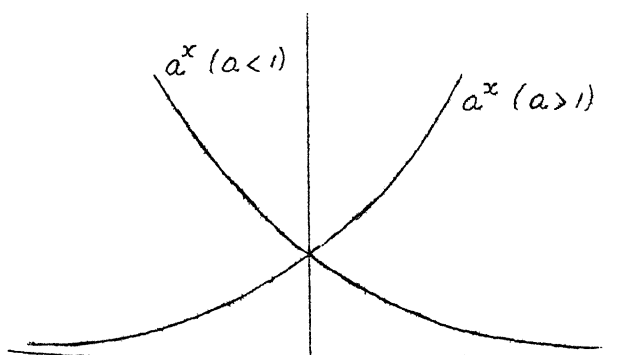
(5.15) $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$.

Bewijs: Dit volgt direct uit (5.12) en (4.8).

(5.16) $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$.

Bewijs: $a^x = e^{x \log a}$; door hierop de kettingregel toe te passen, vinden we het gezochte.

In (5.13) hebben we gevonden, dat a^x voor $a > 0$ en $a \neq 1$ een continue streng monotone functie is, gedefinieerd voor alle reële x .



Deze functie bezit dus een continue streng monotone omkeersfunctie, genaamd ${}^a\log x$ (logarithme van x met grondtal (of basis) a). Men beperkt zich bijna altijd tot logarithmen met grondtal > 1 . Voor $a \neq 1$ neemt $x \log a$ alle reële waarden aan, als x alle reële getallen doorloopt, en dus neemt $e^{x \log a}$ alle positieve reële waarden aan; dus is ${}^a\log x$ gedefinieerd op $(0, +\infty)$. Omdat voor $a > 1$ geldt dat ${}^a\log x$ streng isotoon is, geldt $\lim_{x \rightarrow +\infty} {}^a\log x = +\infty$ en $\lim_{x \rightarrow 0} {}^a\log x = -\infty$. Verder is, wegens (5.12), $e^{\log x} = x$; de logarithme met grondtal e is dus de natuurlijke logarithme. Omdat ${}^a\log x$ de omkeersfunctie van a^x is, geldt ${}^a\log a^x = x$ en $a^{a \log x} = x$. Uit de laatste betrekking volgt $x = e^{a \log x \log a}$, dus $\log x = a \log x \log a$. Dit geeft:

$$(5.17) \quad {}^a\log x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Uit (5.17) volgt direct:

$$(5.18) \quad \frac{d {}^a\log x}{dx} = \frac{1}{x \log a}.$$

Opgave 46. Bewijs (5.18) op een andere wijze uit het feit, dat ${}^a\log x$ de omkeersfunctie van a^x is en met behulp van (5.16).

Uit (5.17) en (5.10) volgt direct:

$$(5.19) \quad {}^a\log xy = {}^a\log x + {}^a\log y.$$

Voor reële α geldt ${}^a\log x^\alpha = \frac{\log x^\alpha}{\log a} = \frac{\log e^{\alpha \log x}}{\log a} = \frac{\alpha \log x}{\log a} = \alpha {}^a\log x$. Dus

$$(5.20) \quad \text{Voor reële } \alpha \text{ en } x > 0 \text{ geldt } {}^a\log x^\alpha = \alpha {}^a\log x.$$

We bepalen nu de afgeleide van $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$. Hiervan is de afgeleide $e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^\alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha-1}$. Dus

$$(5.21) \quad \text{Voor reële } \alpha \text{ en } x > 0 \text{ geldt } \frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Dit is dus een directe uitbreiding van (4.12).

Opgave 47. Bewijs, dat, als voor een differentieerbare functie $f(x)$ geldt $\frac{df(x)}{dx} = f(x)$ voor alle x in het definitie-interval van $f(x)$, er een constante C is, zodat $f(x) = Ce^x$. (Aanwijzing: beschouw de functie $f(x)e^{-x}$).

Opgave 48. Bewijs, dat voor $x \geq 0$ geldt $\log(1+x) \leq x$ en voor $x \geq 0$ en $\alpha \geq 1$ geldt $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$. (Aanwijzing: breng alle termen van de ongelijkheden naar één kant en beschouw afgeleiden.)

We keren nu terug tot onbepaalde en bepaalde integralen. Op grond van stellingen (5.7) en (5.8) bestaat, althans voor continue functies, tussen beide een nauw verband. Zo hebben we al voor de continue functies met behulp van bepaalde integralen kunnen aantonen, dat deze functies onbepaalde integralen, d.w.z. stamfuncties, bezitten. Omgekeerd kan uit een stamfunctie van een continue functie met behulp van (5.8) direct de bepaalde integraal van deze functie berekend worden. In de volgende pa-

ragraaf zullen we onbepaalde integralen van enkele klassen van functies beschouwen. We leiden eerst nog enige stellingen over onbepaalde integralen af, die directe gevolgen zijn van bekende stellingen over afgeleiden. Met behulp van (5.8) zijn hieruit dan weer stellingen over bepaalde integralen af te leiden.

(5.22) Als $f(x)$ en $g(x)$ op hetzelfde interval gedefinieerde continue functies zijn, geldt $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C$.

(5.23) Als $f(x)$ een op een interval gedefinieerde continue functie is en c een constante, geldt $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx + C$.

(5.24) (Partiële integratie) Als $f(x)$ en $g(x)$ op hetzelfde interval gedefinieerde functies zijn, als $f(x)$ differentieerbaar en $g(x)$ continu is, geldt $\int f(x)g(x)dx = f(x)\int g(x)dx - \int \left(\frac{df(x)}{dx}\right)\int g(x)dx + C$.

(5.25) (Transformatie van veranderlijke) Als $\varphi(t)$ een continu differentieerbare functie is en $f(x)$ een continue functie, gedefinieerd op een interval, dat de functiewaarden van $\varphi(t)$ bevat, dan geldt

$$\left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + C.$$

Opgave 49. Bewijs (5.22) tot en met (5.25).

Uit (5.22) en (5.8) volgt:

(5.26) Als $f(x)$ en $g(x)$ continue functies zijn, gedefinieerd op (a,b) , dan geldt $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Uit (5.23) en (5.8) volgt:

(5.27) Als $f(x)$ een continue functie is, gedefinieerd op (a,b) , en als c een constante is, geldt $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

Uit (5.24) en (5.8) volgt

(5.28) (Partiële integratie) Als $f(x)$ en $g(x)$ gedefinieerd zijn op (a,b) , als $f(x)$ differentieerbaar en $g(x)$ continu is, geldt $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\left(\int g(x)dx\right)_{x=b} - f(a)\left(\int g(x)dx\right)_{x=a} - \int_a^b \left(\frac{df(x)}{dx}\right)\int g(x)dx$.

In plaats van $f(b)\left(\int g(x)dx\right)_{x=b} - f(a)\left(\int g(x)dx\right)_{x=a}$ schrijft men ook wel $f(x)\int g(x)dx \Big|_a^b$; een z.g. stokterm.

(5.29) (Transformatie van veranderlijke) Als $\varphi(t)$ een continu differentieerbare functie is, gedefinieerd op (a,b) , en $f(x)$ een continue functie, gedefinieerd op een interval, dat de functiewaarden van $\varphi(t)$

bevat, dan geldt $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$.

Bewijs: Uit (5.25) en (5.8) volgt $\int_a^b f\varphi(t)\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(b)} - \left(\int f(x)dx\right)_{x=\varphi(a)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$.

Op grond van de gemaakte afspraken geldt dit ook als $\varphi(a) > \varphi(b)$. In (5.25) en (5.29) kan men ook een rechtvaardiging zien van de gekozen schrijfwijze van integralen: $\int f dx = \int f \frac{dx}{\frac{dx}{dt}} dt$.

Uit (5.24) en (5.25) samen kunnen we een formule van de onbepaalde integraal van een omkeersfunctie afleiden. Stel $f(x)$ eeneenduidig en continu differentieerbaar met afgeleide overal $\neq 0$, dan is de omkeersfunctie $\varphi(t)$ van $f(x)$ ook eeneenduidig en continu differentieerbaar met afgeleide overal $\neq 0$ ((4.2), (3.15), (4.8), (3.3)). Verder is $f(\varphi(t)) = t$. Uit (5.25) volgt nu $(\int f(x) dx)_{x=\varphi(t)} = \int t \varphi'(t) dt + C_1$ en uit (5.24) volgt $\int t \varphi'(t) dt = t \varphi(t) - \int \varphi(t) dt + C_2$. Dus

(5.30) (Integraal van een omkeersfunctie) Als $f(x)$ eeneenduidig en continu differentieerbaar is met afgeleide overal $\neq 0$ en als $\varphi(t)$ de omkeersfunctie van $f(x)$ is, geldt $\int \varphi(t) dt = t \varphi(t) - (\int f(x) dx)_{x=\varphi(t)} + C$.

Let wel, dat hoewel in de formule de afgeleide van φ niet voorkomt, bij de afleiding de differentieerbaarheid van φ gebruikt is.

Een voorbeeld van toepassing van (5.30) is het volgende: duidelijk is, dat e^x een stamfunctie van e^x is, dus $\int \log t dt = t \log t - e^{\log t} + C = t \log t - t + C$, dus $t \log t - t$ is een stamfunctie van $\log t$. We hadden dit echter ook direct met partiële integratie kunnen vinden: $\int \log t dt = \log t \int 1 dt - \int (\frac{1}{t} \int 1 dt) dt + C = t \log t - t + C$.

We kunnen natuurlijk ook een met (5.30) overeenkomende stelling over bepaalde integralen formuleren (voer dit zelf uit).

Verdere toepassingen van bovenstaande stellingen worden in de volgende paragraaf gegeven.

§ 6. Onbepaalde integralen van enkele klassen van functies.

We laten voortaan de additieve constante C bij onbepaalde integralen weg.

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, als $\alpha \neq -1$. $\int \frac{dx}{x} = \log x$ voor $x > 0$; $\int \frac{dx}{x} = \log(-x)$ voor $x < 0$. Dit wordt samen wel geschreven $\int \frac{dx}{x} = \log |x|$; we mogen dan evenwel bij overgang op bepaalde integralen geen interval kiezen, dat 0 bevat.

$\int e^x dx = e^x$, $\int a^x dx = \int e^{x \log a} dx = \frac{a^x}{\log a}$. Dit laatste kunnen we opvatten als een speciaal geval van het volgende. Neem in de formule voor transformatie van veranderlijken $\varphi(t) = at+b$. Dan komt er $(\int f(x) dx)_{x=at+b} = \int f(at+b) adt$; dus $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} (\int f(t) dt)_{t=ax+b}$. We vinden zo b.v. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}$.

Een onbepaalde integraal van een polynoom $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ vinden we nu ook direct: $\int (\sum_{j=0}^n a_j x^j) dx = \sum_{j=0}^n \frac{a_j x^{j+1}}{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1} x^j}{j}$.

Een voorbeeld van toepassing van partiële integratie: $\int x e^x dx = x \int e^x dx - \int (\int e^x dx) dx = x e^x - e^x$. Een voorbeeld van transformatie van veranderlijken: $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = -(\int \frac{dy}{y})_{y = \cos x} = -\log \cos x$.

Opgave 50. Bereken $\int x^2 e^x dx$, $\int x e^{x^2} dx$, $\int \sin x \, dx$, $\int \operatorname{cotg} x \, dx$, $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$, $\int \frac{dx}{x \log x}$.

We stellen ons nu ten doel een onbepaalde integraal te bepalen van een gebroken rationale functie $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ($P(x)$ en $Q(x)$ polynomen). Hiertoe zijn enige algebraïsche voorbereidingen nodig.

Uit de algebra is bekend:

(6.1) (Deling met rest) Als $f(x)$ en $g(x)$ polynomen zijn met reële coëfficiënten en van $g(x)$ zijn niet alle coëfficiënten nul, dan zijn er polynomen $q(x)$ en $r(x)$ met reële coëfficiënten, zodat $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ en zodat $r(x)$ een graad heeft kleiner dan de graad van $g(x)$ of van $r(x)$ alle coëfficiënten nul zijn.

Als $P(x)$ een polynoom is en α een getal zodat $P(\alpha) = 0$, noemen we α een wortel van de vergelijking $P(x) = 0$ of ook een nulpunt van het polynoom $P(x)$.

De volgende stelling wordt hier zonder bewijs aangenomen.

(6.2) (Hoofdstelling van de algebra) Als $P(x)$ een polynoom is met complexe coëfficiënten en met een graad > 0 , dan is er een complex getal dat nulpunt is van $P(x)$.

We beperken ons hier tot polynomen met reële coëfficiënten. Het kan echter zo zijn, dat zo'n polynoom geen reële nulpunten heeft; b.v. geldt $x^2 + 1 > 0$ voor alle reële x . We onderscheiden daarom twee gevallen.

- 1° α is een reëel nulpunt van het polynoom $P(x)$. We delen nu, volgens (6.1), $P(x)$ met rest door $x - \alpha$, dan is de rest $r(x)$ een constante. Substitutie van α voor x leert ons dat de constante nul is (reststelling). Dus is $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, waarin $Q(x)$ een polynoom is met reële coëfficiënten met een graad die één lager is dan de graad van $P(x)$.
- 2° α is een niet-reëel complex getal, dat nulpunt is van $P(x)$. Dan is het toegevoegd complexe getal $\bar{\alpha}$ ook nulpunt van $P(x)$, want $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$. Omdat α niet reëel is, geldt $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Verder is $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} = x^2 + bx + c$ met reële b en c . We delen nu $P(x)$ met rest door $x^2 + bx + c$, dan heeft $r(x)$ een graad ≤ 1 ; stel $r(x) = sx + t$. Door substitutie van α en $\bar{\alpha}$ voor x vinden we $s\alpha + t = 0$ en $s\bar{\alpha} + t = 0$. Door aftrekking vinden we $s(\alpha - \bar{\alpha}) = 0$, dus, wegens $\alpha \neq \bar{\alpha}$, $s = 0$ en dan ook $t = 0$. Dus is $P(x) = (x^2 + bx + c)Q(x)$, waarin $Q(x)$ een polynoom is met reële coëfficiënten met een graad die twee lager is dan de graad van $P(x)$.

Voor het zoëven gevonden polynoom $x^2 + bx + c$ geldt $4c > b^2$, want $4c - b^2 = 4\alpha\bar{\alpha} - (\alpha + \bar{\alpha})^2 = -(\alpha - \bar{\alpha})^2 > 0$, omdat $\alpha - \bar{\alpha}$ zuiver imaginair is. Omgekeerd heeft ieder polynoom $x^2 + bx + c$ met reële b en c en $4c > b^2$ geen reële nulpunten, want voor alle reële x is $x^2 + bx + c = (x + \frac{1}{2}b)^2 + \frac{4c - b^2}{4} > 0$.

Door inductie vinden we nu:

(6.3) Een polynoom $P(x)$ met reële coëfficiënten is te schrijven in de vorm

$P(x) = a \prod_{k=1}^r P_k(x)$, waarin a reëel is en iedere $P_k(x)$ hetzij de gedaante $x - d_k$ met reële d_k , hetzij de gedaante $x^2 + b_k x + c_k$ met b_k en c_k reëel en $4c_k > b_k^2$ heeft.

We beperken ons nu verder weer tot polynomen met reële coëfficiënten.

We noemen het polynoom $d(x)$ een deler van het polynoom $f(x)$ als er een polynoom $q(x)$ bestaat zodat $f(x) = q(x)d(x)$.

Onder een grootste gemene deler (g.g.d.) van twee polynomen $f(x)$ en $g(x)$ verstaan we een polynoom $d(x)$ dat deler is van $f(x)$ en van $g(x)$ dusdanig dat ieder polynoom, dat deler is van $f(x)$ en van $g(x)$, deler is van $d(x)$. Het bestaan van een g.g.d., als minstens één van beide polynomen een coëfficiënt $\neq 0$ heeft zullen we nu aantonen. Beschouw daartoe uitdrukkingen van de gedaante $u(x)f(x) + v(x)g(x)$, waarin $u(x)$ en $v(x)$ polynomen zijn; deze zijn dan ook polynomen. Er komen hieronder polynomen voor, waarvan niet alle coëfficiënten nul zijn, want als van $f(x)$ niet alle coëfficiënten nul zijn, voldoet $f(x) = 1f(x) + 0g(x)$. Neem nu onder deze uitdrukkingen één met minimale graad en noem deze $d(x)$, dan is $d(x) = h(x)f(x) + k(x)g(x)$. Deel nu $f(x)$ met rest door $d(x)$ ($f(x) = q(x)d(x) + r(x)$), dan is $r(x) = (1 - q(x)h(x))f(x) + (-q(x)k(x))g(x)$. Wegens de minimaliteit van de graad van $d(x)$, zijn van $r(x)$ alle coëfficiënten nul, dus $f(x) = q(x)d(x)$, dus $d(x)$ is een deler van $f(x)$. Evenzo bewijst men, dat $d(x)$ een deler is van $g(x)$. Als verder $d_1(x)$ een willekeurige deler is van $f(x)$ en van $g(x)$, dan volgt uit $d(x) = h(x)f(x) + k(x)g(x)$ direct dat $d_1(x)$ een deler is van $d(x)$. Dus is $d(x)$ een g.g.d. van $f(x)$ en $g(x)$.

(6.4) Bij twee polynomen $f(x)$ en $g(x)$, waarvan van minstens één van beide niet alle coëfficiënten nul zijn, is een polynoom $d(x)$ te vinden, dat g.g.d. van $f(x)$ en $g(x)$ is en dat te schrijven is in de gedaante $d(x) = h(x)f(x) + k(x)g(x)$, zodat $h(x)$ en $k(x)$ polynomen zijn.

Als $f(x)$ en $g(x)$ nu dusdanige polynomen zijn, dat hun g.g.d. niets anders kan zijn dan een constante (hiervan zullen we straks een voorbeeld vinden), dan is er, volgens (6.4), een getal $a \neq 0$, dat te schrijven is als $a = h(x)f(x) + k(x)g(x)$, en dus ook, door vermenigvuldiging met a^{-1} , $1 = h_1(x)f(x) + k_1(x)g(x)$, waarin $h_1(x)$ en $k_1(x)$ polynomen zijn. Als $P(x)$ een willekeurig polynoom is, vinden we

$$\frac{P(x)}{f(x)g(x)} = \frac{h_1(x)P(x)}{g(x)} + \frac{k_1(x)P(x)}{f(x)}. \text{ Daarmee hebben we gevonden:}$$

(6.5) Als $P(x)$, $f(x)$ en $g(x)$ polynomen zijn, dusdanig dat $f(x)$ en $g(x)$ een constante g.g.d. hebben dan is $\frac{P(x)}{f(x)g(x)} = \frac{P_1(x)}{f(x)} + \frac{P_2(x)}{g(x)}$, waarin $P_1(x)$ en $P_2(x)$ polynomen zijn.

We willen dit nu toepassen op gebroken rationale functies $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

We ontbinden eerst $Q(x)$ volgens (6.3): $Q(x) = a \prod_{k=1}^r Q_k(x)$. Onder de factoren $Q_k(x)$ kunnen er zijn, die identiek gelijk zijn (d.w.z. dezelfde coëfficiënten hebben). Neem nu een maximaal aantal van dergelijke identieke factoren samen tot $f(x)$, dan is $f(x)$ van de gedaante $(x-d)^m$ of $(x^2 + bx + c)^m$ met $4c > b^2$ en $Q(x) = af(x)g(x)$; dan bestaat $g(x)$ uit sommige der factoren $Q_k(x)$, waarvan er geen identiek gelijk is aan $x-d$ resp. $x^2 + bx + c$. Als het polynoom $u(x)$ een deler is van het polynoom $v(x)$ is een nulpunt van $u(x)$ ook nulpunt van $v(x)$. Nu heeft $f(x)$ blijkbaar als enige complexe nulpunten hetzij d , hetzij de nulpunten α en $\bar{\alpha}$ van $x^2 + bx + c$. Deze zijn echter geen nulpunten van $g(x)$, daar ze geen nulpunten van een der factoren $Q_k(x)$ van $g(x)$ kunnen zijn. Dus hebben $f(x)$ en $g(x)$ geen nulpunten gemeen; een g.g.d. van $f(x)$ en $g(x)$ heeft dus geen nulpunt en moet dus volgens de hoofdstelling van de algebra een constante zijn. We kunnen dus (6.5) toepassen en vinden

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a^{-1}P(x)}{f(x)g(x)} = \frac{P_1(x)}{f(x)} + \frac{P_2(x)}{g(x)}. \text{ Met } g(x) \text{ kunnen we het procédé herhalen. We vinden dan door inductie:}$$

(6.6) (Splitsing in partiële breuken; eerste vorm) Als $P(x)$ en $Q(x)$ polynomen zijn, dan is

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^s \frac{P_k(x)}{Q_k(x)}, \text{ waarin de } P_k(x) \text{ polynomen zijn en iedere } Q_k(x) \text{ hetzij de gedaante } (x-d_k)^{m_k}, \text{ hetzij de gedaante } (x^2+b_kx+c_k)^{m_k} \text{ met } 4c_k > b_k^2 \text{ heeft.}$$

De termen, die we in (6.6) vinden kunnen we nu nog verder splitsen. Zulk een term heeft de gedaante $\frac{P(x)}{(Q(x))^m}$ met $P(x)$ een polynoom en $Q(x)$ hetzij van de gedaante $x-d$, hetzij van de gedaante $x^2 + bx + c$ met $4c > b^2$. Deel nu $P(x)$ met rest door $Q(x)$: $P(x) = T(x)Q(x) + R(x)$, dan is $\frac{P(x)}{(Q(x))^m} = \frac{R(x)}{(Q(x))^m} + \frac{T(x)}{(Q(x))^{m-1}}$. Met $\frac{T(x)}{(Q(x))^{m-1}}$ zetten we het proces voort. Zo vinden we ten slotte $\frac{P(x)}{(Q(x))^m} = T_0(x) + \sum_{j=1}^m \frac{R_j(x)}{(Q(x))^j}$, waarin de $R_j(x)$

($j = 1, \dots, m$) graden hebben die kleiner zijn dan de graad van $Q(x)$; d.w.z. als $Q(x)$ de gedaante $x-d$ heeft, zijn de $R_j(x)$ constanten en als $Q(x)$ de gedaante $x^2 + bx + c$ heeft, zijn de $R_j(x)$ van de gedaante $q_jx + r_j$. Zo vinden we:

(6.7) (Splitsing in partiële breuken, tweede vorm) Als $P(x)$ en $Q(x)$ polynomen zijn, dan is $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^t \frac{P_k(x)}{Q_k(x)} + T(x)$, waarin $T(x)$ een polynoom is en hetzij $Q_k(x)$ de gedaante $(x-d_k)^{m_k}$ heeft en $P_k(x)$ een constante is, hetzij $Q_k(x)$ de gedaante $(x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}$ met $4c_k > b_k^2$ en $P_k(x)$ de gedaante $q_k x + r_k$ heeft.

Omdat de onbepaalde integraal van een som gelijk is aan de som van de onbepaalde integralen der termen, kunnen we ons, om de onbepaalde integraal van een gebroken rationale functie te vinden, wegens (6.7), beperken tot het bepalen van onbepaalde integralen van het type $\int \frac{p \, dx}{(x-d)^m}$ en $\int \frac{qx + r}{(x^2 + bx + c)^m} \, dx$ met $4c > b^2$. De eerste integraal is $-\frac{p}{(m-1)(x-d)^{m-1}}$ voor $m > 1$ en $p \log(x-d)$ voor $m = 1$. Op de tweede integraal passen we een transformatie van veranderlijken toe als volgt:

$$\int \frac{qx + r}{(x^2 + bx + c)^m} \, dx = \frac{2^{2m-1}}{(4c-b^2)^{m-\frac{1}{2}}} \left[\int \frac{\frac{1}{2}q \sqrt{4c-b^2} y + r - \frac{1}{2}bq}{(y^2+1)^m} \, dy \right]_{y = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}(x+\frac{1}{2}b)}$$

Het is dus voldoende onbepaalde integralen te bepalen van het type $\int \frac{x \, dx}{(x^2+1)^m}$ en $\int \frac{dx}{(x^2+1)^m}$. Het eerste type geeft $\int \frac{x \, dx}{(x^2+1)^m} = \frac{1}{2} \left[\int \frac{dy}{(y+1)^m} \right]_{y=x^2}$ en dit

is $-\frac{1}{2(m-1)(x^2+1)^{m-1}}$ voor $m > 1$ en $\frac{1}{2} \log(x^2+1)$ voor $m = 1$. We stellen

nu $J_m = \int \frac{dx}{(x^2+1)^m}$. Dan is $J_{m+1} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^{m+1}} \, dx = J_m - \int \frac{x^2 \, dx}{(x^2+1)^{m+1}}$.

Verder is $\frac{d}{dx} \frac{1}{(x^2+1)^m} = -\frac{2mx}{(x^2+1)^{m+1}}$, dus $\int \frac{x \, dx}{(x^2+1)^{m+1}} = -\frac{1}{2m(x^2+1)^m}$. Dit

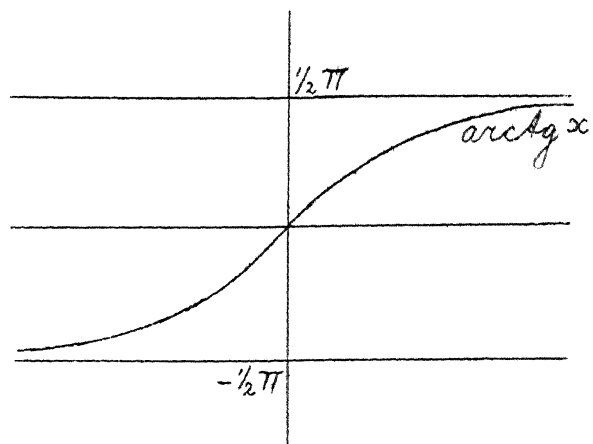
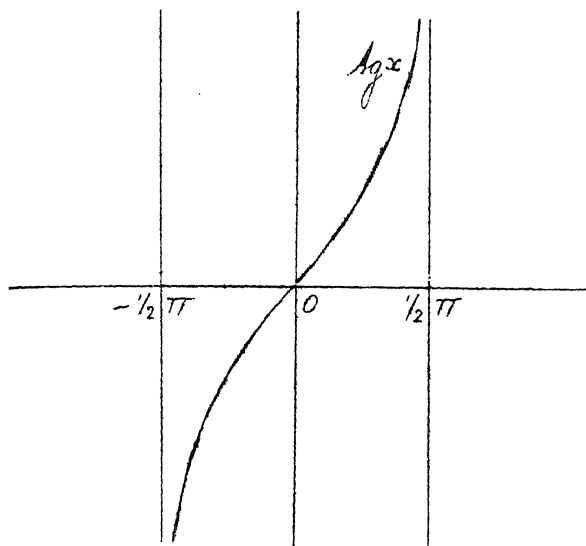
geeft met partiële integratie: $J_{m+1} = J_m - \int x \frac{x \, dx}{(x^2+1)^{m+1}} =$

$$= J_m + \frac{x}{2m(x^2+1)^m} - \frac{1}{2m} \int \frac{dx}{(x^2+1)^m} = \frac{2m-1}{2m} J_m + \frac{x}{2m(x^2+1)^m}. \text{ Als we dus } J_1$$

kunnen bepalen, zijn door inductie de J_m voor $m > 1$ ook te vinden.

We beschouwen nu de functie $\operatorname{tg} x$ voor x in $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. De afgeleide van $\operatorname{tg} x$ is $\frac{1}{(\cos x)^2}$, dus > 0 ; dus is $\operatorname{tg} x$ een streng isotone continue functie. Nu is $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \sin x = 1$ en $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \cos x = 0$, dus $\operatorname{tg} x$ neemt willekeu-

rig grote positieve waarden aan. Door evenzo $-\frac{1}{2}\pi$ te beschouwen vinden we dat $\operatorname{tg} x$ willekeurig kleine negatieve waarden aanneemt. De omkeersfunctie is dus gedefinieerd op $(-\infty, +\infty)$ en wordt aangeduid met $\operatorname{arctg} x$ (spreek uit: boog tangens x ; men schrijft ook wel $\operatorname{bgtg} x$). De afgeleide van $\operatorname{arctg} x$:



vinden we als volgt: stel $x = \operatorname{tg} y$, dan is $y = \operatorname{arctg} x$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(\cos y)^2} = (\operatorname{tg} y)^2 + 1 = x^2 + 1$, dus $\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1}$. Dus $J_1(x) = \operatorname{arctg} x$.

Hiermede hebben we dus gevonden:

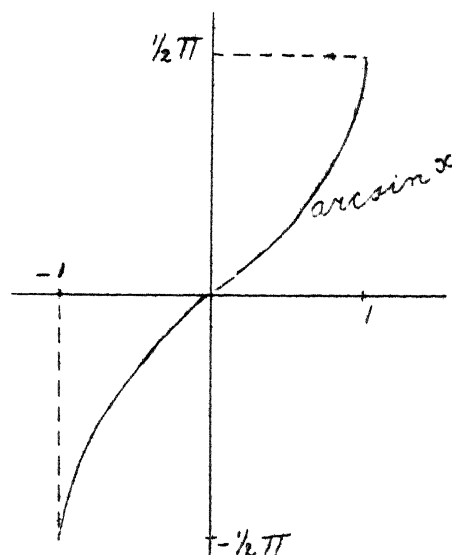
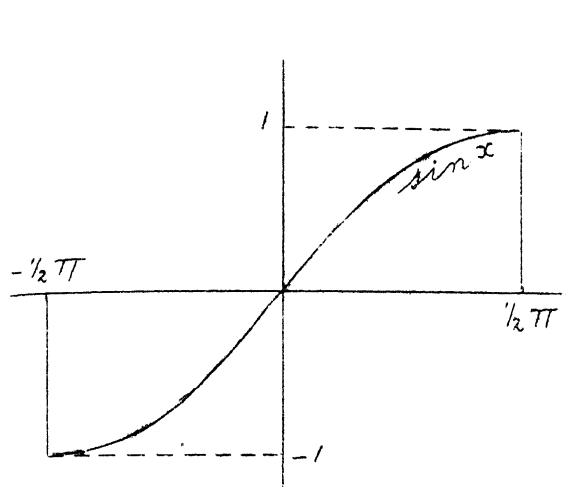
(6.8) Een onbepaalde integraal van een gebroken rationale functie is te vinden als een functie die ontstaat door samenstelling van functies, die gebroken rationale functies, log-functies en arctg-functies zijn.

We merken nog op, dat we, nu we weten dat de splitsing in partiële breuken mogelijk is, deze splitsing eenvoudiger kunnen vinden, dan uit het bewijs van de mogelijkheid van deze splitsing volgt. We stellen nl. de te vinden splitsing met onbepaalde coëfficiënten op, maken de breuken door vermenigvuldiging weg en stellen de coëfficiënten van overeenkomstige machten van x aan elkaar gelijk. De onbepaalde coëfficiënten zijn daaruit dan op te lossen.

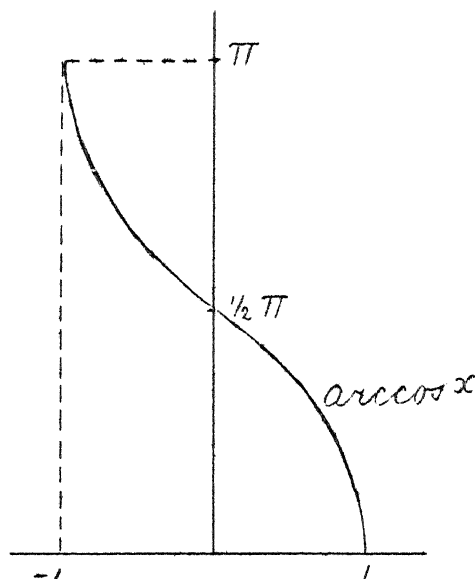
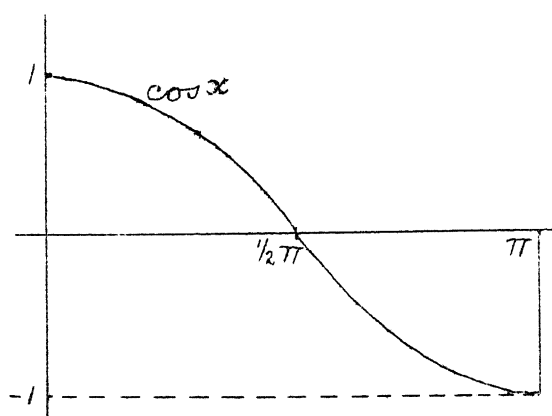
Voorbeeld: Splits $\frac{x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 26x + 18}{x(x+3)^2}$ in partiële breuken. We schrijven het volgende op: $\frac{a}{(x+3)^2} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x} + d + ex$. Door de graden van teller en noemer in de oorspronkelijke breuk met elkaar te vergelijken zien we, dat er geen hogere machten van x nodig zijn. Vermenigvuldigen we met $x(x+3)^2$, dan komt er: $ex^4 + (d+6e)x^3 + (b+c+6d+9e)x^2 + (a+3b+6c+9d)x + 9b$. Door gelijkstelling van coëfficiënten komt er: $e=1$, $d+6e=4$, $b+c+6d+9e=-5$, $a+3b+6c+9d=-26$, $9b=-18$, waaruit we makkelijk vinden $a=4$, $b=0$, $c=-2$, $d=-2$, $e=1$, zodat de gezochte splitsing wordt: $\frac{4}{(x+3)^2} - \frac{2}{x} - 2 + x$.

Opgave 51. Bepaal $\int \frac{dx}{x^3 - x}$, $\int \frac{x+2}{x^4 + x^3} dx$, $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Bij de bepaling van de onbepaalde integraal van een gebroken rationale functie hebben we een omkeersfunctie van $\operatorname{tg} x$ moeten invoeren. We doen nu hetzelfde voor $\sin x$ en $\cos x$. In $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ is de afgeleide $\cos x$ van



$\sin x$ positief, dus is $\sin x$ daar streng isotoon en continu. Dus bezit $\sin x$ daar een streng isotone omkeersfunctie $\arcsin x$, die wegens $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ en $\sin(-\frac{1}{2}\pi) = -1$ gedefinieerd is op $(-1, +1)$. In $(0, \pi)$ is de afgeleide $-\sin x$ van $\cos x$ negatief, dus is $\cos x$ daar streng antitoon en continu.



Dus bezit $\cos x$ daar een streng antitone omkeersfunctie $\arccos x$, die wegens $\cos 0 = 1$ en $\cos \pi = -1$ gedefinieerd is op $(-1, +1)$. Let wel, dat voor de bepaling van $\arccos$ het argument van de $\cos$ tussen 0 en π gekozen wordt. Als dus x niet tussen 0 en π ligt geldt $\arccos(\cos x) \neq x$. Wel geldt voor $-1 < x < 1$ steeds $\cos(\arccos x) = x$. Analoge opmerkingen gelden voor $\arcsin$ en $\arctg$.

Opgave 52. Bepaal $\frac{d \arcsin x}{dx}$ en $\frac{d \arccos x}{dx}$. Wat concludeert U hieruit voor $\arcsin x$ en $\arccos x$?

Opgave 53. Bepaal $\int \arcsin x \, dx$, $\int \arccos x \, dx$ en $\int \arctg x \, dx$.

Een functie die aan ieder getallenpaar (x, y) het getal $\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} x^j y^k$ toevoegt, heet een polynoom in twee veranderlijken. Een gebroken rationale functie van twee veranderlijken is een functie $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, waarin $P(x, y)$ en

$Q(x,y)$ polynomen in twee veranderlijken zijn. Analooft definieert men gebroken rationale functies van meer dan twee veranderlijken.

We willen nu onbepaalde integralen bepalen van functies van het type $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, waarin $R(x,y)$ een gebroken rationale functie van twee veranderlijken is; een voorbeeld van een dergelijke functie is $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Als $a=b=0$, is het een gewone gebroken rationale functie, die al behandeld is. Als $a=0, b \neq 0$, is de integraal direct door transformatie op de integraal van een gewone gebroken rationale functie terug te brengen, als volgt: $\int R(x, \sqrt{bx+c}) dx = \frac{2}{b} \left(\int y R\left(\frac{y^2-c}{b}, y\right) dy \right)$ $y = \sqrt{bx+c}$.

Nu stellen we $a > 0$. Dan is $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}$. Als $b^2 = 4ac$, dan geeft dit als $x \geq -\frac{b}{2a}$ is $\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ en als $x \leq -\frac{b}{2a}$ is $-\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$. Op beide intervallen komt er dan een gewone gebroken rationale functie. Als $b^2 \neq 4ac$, stellen we $\frac{4ac-b^2}{4a^2} = \pm y^2$ of $-y^2$ al naar gelang $4ac > b^2$ of $4ac < b^2$, dan kan $y > 0$ gekozen worden. In beide gevallen stellen we $y = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ en vinden

$$\int R(x, \sqrt{a} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm y^2}) dx = \sqrt{a} \left(\int R\left(\sqrt{a}y - \frac{b}{2a}, \sqrt{a} \sqrt{y^2 \pm 1}\right) dy \right)_{y=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)}.$$

Stellen we $a < 0$, dan is $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a} \sqrt{-\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac-b^2}{4a^2}}$. Als

$4ac > b^2$, is er geen x waarvoor het polynoom onder het wortelteken ≥ 0 wordt; als $4ac = b^2$ is er slechts één waarde van x (n.l. $x = -\frac{b}{2a}$) waarvoor het polynoom onder het wortelteken ≥ 0 wordt; beide gevallen kunnen we dus uitsluiten. Als $4ac < b^2$, stellen we $b^2-4ac = y^2$ met $y > 0$. We stellen nu weer $y = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ en vinden

$$\int R(x, \sqrt{-a} \sqrt{-\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + y^2}) dx = \sqrt{-a} \left(\int R\left(\sqrt{-a}y - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a} \sqrt{1-y^2}\right) dy \right)_{y=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)}.$$

Er blijven dus nog de drie gevallen $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$ en $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$ te onderzoeken.

1° $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx$. Stel $t = x + \sqrt{x^2+1}$, dan is $t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 1$, dus $x = \frac{t^2-1}{2t}$, $\sqrt{x^2+1} = t-x = \frac{t^2+1}{2t}$ en $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2+1}{2t^2}$. Dus er geldt $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx = \left(\int \frac{t^2+1}{2t^2} R\left(\frac{t^2-1}{2t}, \frac{t^2+1}{2t}\right) dt \right)_{t=x+\sqrt{x^2+1}}$.

2° $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$. Stel $t = x + \sqrt{x^2-1}$, dan is $t^2 - 2tx + x^2 = x^2 - 1$, dus $x = \frac{t^2+1}{2t}$, $\sqrt{x^2-1} = t-x = \frac{t^2-1}{2t}$ en $\frac{dx}{dt} = \frac{t^2-1}{2t^2}$. Dus er geldt $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx = \left(\int \frac{t^2-1}{2t^2} R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) dt \right)_{t=x+\sqrt{x^2-1}}$.

$$= \left(\int \frac{t^2-1}{2t^2} R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) dt \right)_{t=x+\sqrt{x^2-1}}.$$

3° $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$. Voor $x \neq 0$ stellen we $t = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$, dan is $x^2 t^2 - 2xt + 1 =$

$$= 1-x^2, \text{ dus } x = \frac{2t}{1+t^2}, \sqrt{1-x^2} = 1-xt = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ en } \frac{dx}{dt} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Voor een interval dat 0 niet bevat geldt er dus $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx =$

$$= \left(\int \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) dt \right)_{t=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}}.$$

De beperking $x \neq 0$ kan hierbij nog vervallen, daar de functie $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ in 0 uit te breiden is,

zodat zij daar continu differentieerbaar is, immers voor $-1 < x < 1$

en $x \neq 0$ geldt $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin x \right)$ (dit is direct af te leiden

uit $\operatorname{tg} \frac{1}{2} u = \frac{1-\cos u}{\sin u}$) en de laatste functie is ook in 0 continu differentieerbaar.

Daarmee is de volgende stelling bewezen.

(6.9) Een onbepaalde integraal van een functie $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, waarin $R(x,y)$ een gebroken rationale functie van twee veranderlijken voorstelt, is te vinden als een functie, die ontstaat door samenstelling van functies die gebroken rationale functies, log-functies, arctg-functies en de functie $\sqrt{ax^2+bx+c}$ zijn.

Opgave 54. Bepaal $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $\int \sqrt{x^2-1} dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Om $\int R(\sin x, \cos x) dx$, waarin $R(x,y)$ een gebroken rationale functie is, te bepalen, stellen we $u = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$, dan is $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x}{1+(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x)^2} = \frac{2u}{1+u^2}$,

$$\cos x = \frac{1-(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x)^2}{1+(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x)^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2} \text{ en } \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x)^2) = \frac{1}{2}(1+u^2), \text{ dus er geldt}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \left(\int \frac{2}{1+u^2} R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) du \right)_{u=\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}.$$

In speciale gevallen kan het wel eenvoudiger. Zo is b.v. $\int (\sin x)^n dx = -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (\cos x)^2 dx = -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx - (n-1) \int (\sin x)^n dx$. Voor gehele $n \geq 1$ kiezen we nu de formule:

$$\int (\sin x)^n dx = -\frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x + \frac{n-1}{n} \int (\sin x)^{n-2} dx;$$

voor gehele $n \leq -2$ kiezen we de formule:

$$\int (\sin x)^n dx = \frac{1}{n+1} (\sin x)^{n+1} \cos x + \frac{n+2}{n+1} \int (\sin x)^{n+2} dx.$$

Met deze formules is de bepaling van de integralen $\int (\sin x)^n dx$ voor alle gehele n terug te brengen op de bepaling van $\int dx = x$ en $\int \frac{dx}{\sin x}$. De laatste bepalen we met het algemene procédé en vinden $\int \frac{dx}{\sin x} =$
 $= \left(\int \frac{2}{1+u^2} \cdot \frac{1+u^2}{2u} du \right)_{u=\operatorname{tg} \frac{1}{2}x} = \left(\int \frac{du}{u} \right)_{u=\operatorname{tg} \frac{1}{2}x} = \log |\operatorname{tg} \frac{1}{2}x|.$

Opgave 55. Bewijs dat voor natuurlijke n geldt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2n} dx = \frac{1}{2}\pi \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \text{ en } \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2n-1} dx = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{2k+1}.$$

We zouden $\int (\cos x)^n dx$ analoog als boven kunnen behandelen, maar we kunnen deze ook terugbrengen op $\int (\sin x)^n dx$ als volgt $\int (\cos x)^n dx = - \left(\int (\sin y)^n dy \right)_{y=\frac{1}{2}\pi-x}.$

We merken nog op, dat dikwijls in speciale gevallen de integralen op eenvoudiger wijze te vinden zijn, dan met behulp van algemene methoden zoals die in deze paragraaf voor klassen van functies behandeld zijn. Daarvan hebben we zoëven bij $\int (\sin x)^n dx$ al een voorbeeld gezien. Een ander voorbeeld: $\int \sqrt{1-x^2} dx$. Stel $x = \sin t$ ($-\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi$), dan is $\int \sqrt{1-x^2} dx = \left(\int (\cos t)^2 dt \right)_{t=\arcsin x}$ en deze is met de hierboven gegeven formules direct te behandelen.

Opgave 56. Bepaal $\int (\sin x)^2 dx$ en $\int (\cos x)^2 dx$.

Opgave 57. Breng $\int R(e^x) dx$, waarin $R(x)$ een gebroken rationale functie is, terug op een integraal van een reeds bekend type.

Opgave 58. Breng $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$, waarin $R(x,y,z)$ een gebroken rationale functie is, terug op een integraal van een reeds bekend type.

Opgave 59. Bepaal $\int x^\alpha \log x dx$ (α willekeurig reëel), $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^{2n}-1}}.$

Niet alle integralen van eenvoudige functies zijn weer in eenvoudige functies uit te drukken. Zo lukt dit b.v. niet bij $\int \frac{\sin x}{x} dx$ en $\int \frac{e^x}{x} dx$.

§ 7. De stellingen van l'Hospital.

Als we $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ willen bepalen, stuiten we op de moeilijkheid, dat, als we x naar nul laten gaan, zowel de teller als de noemer van de breuk naar nul gaan. De breuk wordt dus onbepaald; desondanks kan, zoals trouwens in het hier gegeven voorbeeld zal blijken, de limiet wel bestaan. We kunnen deze limieten met behulp van differentiaalrekening dikwijls bepalen; het complex van stellingen dat hierop betrekking heeft noemt men meestal stellingen van l'Hospital.

We beginnen eerst met een hulpstelling.

(7.1) Als $f(x)$ een n maal differentieerbare functie is ($n \geq 1$), dan is er bij iedere a in het definitie-interval I van $f(x)$ een functie $\varepsilon(x)$, gedefinieerd op I , zodat $\varepsilon(a) = 0$, $\varepsilon(x)$ continu in a is en $f(x) =$
 $= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x).$

Bewijs: We bewijzen de stelling door volledige inductie naar n . Voor $n=1$ volgt de stelling direct uit (4.1). Stel nu dat $n > 1$ is en de stelling geldig is met $n-1$ in plaats van n . Noem $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$, dan is $g'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)k(x-a)^{k-1}$.
 $= f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(a)(x-a)^k$. Verder is $g(a) = 0$. Pas nu de stelling met $n-1$ in plaats van n toe op $f'(x)$, dan bestaat er een functie $\varepsilon_1(x)$, gedefinieerd op I , zodat $\varepsilon_1(a) = 0$, $\varepsilon_1(x)$ continu in a is en $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(a)(x-a)^k + (x-a)^{n-1} \varepsilon_1(x)$. Dus $g'(x) = (x-a)^{n-1} \varepsilon_1(x)$. We passen nu de middelwaardestelling van de differentiaalrekening toe en vinden dat er bij iedere $x \neq a$ een ξ tussen x en a te vinden is zodat $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(\xi)$. Dit geeft $g(x) = (x-a)(\xi - a)^{n-1} \varepsilon_1(x)$, dus $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + (x-a)(\xi - a)^{n-1} \varepsilon_1(x)$. Definieren we nu $\varepsilon(x)$ door $\varepsilon(a) = 0$ en $\varepsilon(x) = \left(\frac{\xi - a}{x-a}\right)^{n-1} \varepsilon_1(x)$ voor x in I en $x \neq a$, dan is $\varepsilon(x)$ gedefinieerd op I en $\varepsilon(a) = 0$. Verder is $\left|\frac{\xi - a}{x-a}\right| < 1$, dus $\left|\frac{\xi - a}{x-a}\right|^{n-1} < 1$, dus $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\xi - a}{x-a}\right)^{n-1} \varepsilon_1(x) = 0$, dus $\varepsilon(x)$ continu in a . Ten slotte is $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$. Daarmee is het bewijs voltooid.

(7.2) (Stelling van l'Hospital; eerste vorm met eerste afgeleiden). Als $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar zijn in a , als $f(a) = g(a) = 0$ en als $g'(a) \neq 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$. (Dit betekent $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ bestaat en $= \frac{f'(a)}{g'(a)}$). Analoge afkortingen gebruiken we in het vervolg.)

Bewijs: Neem een rij a_n met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ en $a_n \neq a$ voor alle n . Dan is $f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}$ en $g'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(a_n) - g(a)}{a_n - a}$. Omdat $g'(a) \neq 0$, is $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}}{\frac{g(a_n) - g(a)}{a_n - a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{g(a_n) - g(a)}$. Hieruit volgt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Hiermee vinden we onmiddellijk $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \left[\frac{1}{1+x} \right]_{x=0} = 1$.

Soms echter komen we met deze methode niet verder, b.v. als we $f(x) = x^2$ en $g(x) = -1 + x + e^{-x}$ en $x \rightarrow 0$ nemen. Dan is n.l. $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$. We moeten dan hogere afgeleiden gebruiken.

(7.3) (Stelling van l'Hospital; eerste vorm met hogere afgeleiden) Als $f(x)$ en $g(x)$ n maal differentieerbaar zijn ($n \geq 1$), als $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ voor $0 \leq k \leq n-1$ en als $g^{(n)}(a) \neq 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

Bewijs: Uit (7.1) volgt dat $f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_1(x)$ en $g(x) = \frac{1}{n!} g^{(n)}(a)(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$, waarin $\varepsilon_1(x)$ en $\varepsilon_2(x)$ continu in a zijn en $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(a) = 0$. Dus voor $x \neq a$ is $\frac{f(x)}{g(x)} =$

$$= \frac{f^{(n)}(a) + n! \varepsilon_1(x)}{g^{(n)}(a) + n! \varepsilon_2(x)} \text{ en hieruit volgt direct } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Nemen we als boven $f(x) = x^2$ en $g(x) = -1 + x + e^{-x}$, dan is $f''(x) = 2$ en $g''(x) = e^{-x}$, dus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-1+x+e^{-x}} = 2$.

Opgave 60. Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{1 - \cos x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Wanneer we ons ten doel stellen $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arccos x}{\arccos x^2}$ te berekenen, dan zijn bovenstaande methoden niet toepasselijk, daar $\arccos x$ voor $x=1$ niet zo te definiëren is, dat hij daar differentieerbaar wordt. Voor deze gevallen is er een andere vorm van de stellingen van l'Hospital.

(7.4) (Stelling van l'Hospital; tweede vorm met eerste afgeleiden) Als $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbare functies zijn met a als randpunt van hun definitie-interval (in a behoeven de functies niet meer gedefinieerd te zijn), als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ en als $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat, dan is

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bewijs: Op grond van het gegeven zijn $f(x)$ en $g(x)$ continu uit te breiden in a door de definitie $f(a) = g(a) = 0$. Ze behoeven daar dan echter niet differentieerbaar te zijn. Omdat $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat, is er een $\lambda > 0$ zodat voor $|x-a| < \lambda$ geldt $g'(x) \neq 0$. Hieruit volgt dat $g(x)$ daar streng monotoon en dus, voor $x \neq a$, $g(x) \neq 0$ is. Voor een $x \neq a$ met $|x-a| < \lambda$ geldt dan op grond van de gegeneraliseerde middelwaardestelling van de differentiaalrekening, dat er een ξ tussen x en a bestaat zodat

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dus $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

Met behulp van (7.4) vinden we dat $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arccos x}{\arccos x^2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Opgave 61. Bereken $\lim_{x \downarrow 0} \frac{e^x \sin(\log x) - 1}{\sqrt{x}}.$

Er is een sterke analogie tussen (7.2) en (7.4); in de veronderstellingen zit echter een essentieel verschil: in (7.2) wordt differentieerbaarheid in a verondersteld, maar niet daarbuiten, in (7.4) wordt juist differentieerbaarheid buiten a verondersteld, maar niet in a .

Ook (7.4) kan tot hogere afgeleiden uitgebreid worden.

(7.5) (Stelling van l'Hospital; tweede vorm met hogere afgeleiden) Als $f(x)$ en $g(x)$ n maal ($n \geq 1$) differentieerbare functies zijn met a als randpunt van hun definitie-interval (in a behoeven de functies niet meer gedefinieerd te zijn), als $\lim_{x \rightarrow a} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = 0$ voor

$0 \leq k \leq n-1$ en als $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ bestaat, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$

Bewijs: We passen volledige inductie naar n toe. Voor $n=1$ krijgen we (7.4). Neem nu $n > 1$ en stel dat de stelling geldig is met $n-1$ in plaats van n . We kunnen (7.4) toepassen op $f^{(n-1)}(x)$ en $g^{(n-1)}(x)$ en vinden dan dat $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$ bestaat en $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$. Volgens inductieve veronderstelling bestaat dan ook $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ en $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$, dus

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Uit (7.4) kunnen we nog een interessante conclusie trekken.

(7.6) Als $f(x)$ een differentieerbare functie is en a is een randpunt van haar definitie-interval, waar $f(x)$ continu uit te breiden is en als

$\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ bestaat, dan is de uitgebreide functie $f(x)$ differentieerbaar in a met als afgeleide $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.

Bewijs: Dit volgt direct uit (7.4) met als functies $f(x)-f(a)$ en $x-a$

We kunnen (7.6) niet geheel exact, maar kort zo uitdrukken: als de afgeleide van een functie ergens continu uitgebreid kan worden, dan is zij daar ook een afgeleide. De veronderstelling in (7.6) dat $f(x)$ zelf continu uit te breiden is in a kan nog gemist worden; we gaan daar echter niet op in.

Om $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x$ te bepalen, zouden we $f(x) = x$ en $g(x) = \frac{1}{\log x}$ kunnen nemen, dan is $f'(x) = 1$ en $g'(x) = -\frac{1}{x(\log x)^2}$, dus $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -x(\log x)$. Hiermee schieten we dus niets op (ook niet met hogere afgeleiden). De tot nu toe behandelde stellingen van l'Hospital zouden we van het type $\frac{0}{0}$ kunnen noemen: ze gingen over de limiet waartoe het quotiënt van twee functies nadert, als beide in het kritieke punt nul worden. Er zijn echter ook dergelijke stellingen van het type $\frac{\infty}{\infty}$: beide functies worden dan onbegrensd bij het kritieke punt.

(7.7) (Stelling van l'Hospital voor onbegrensde functies) Als $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbare functies zijn en a is randpunt van het definitie-interval, als $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ en als $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat, dan is

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bewijs: We veronderstellen dat a beginpunt is van het definitie-interval (als het eindpunt is gaat het analoog). Omdat $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat is er een $\lambda > 0$ zodat uit $|x-a| < \lambda$ volgt $g'(x) \neq 0$, dus $g(x)$ streng monotoon. Noem $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$, dan is bij $\varepsilon > 0$ een $\delta_1 > 0$ met $\delta_1 < \lambda$ te vinden, zodat uit $|x-a| < \delta_1$ volgt $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - b \right| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Stel nu $a < y < x < \delta_1$, dan geeft de generaliseerde middelwaardestelling van de differentiaalrekening, dat er een ξ tussen x en y is, zodat $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Verder is $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{\frac{f(x)}{g(y)} - \frac{f(y)}{g(y)}}{\frac{g(x)}{g(y)} - 1}$; houden we nu x vast en laten

we y variëren, dan is dit begrensd, maar dan is wegens $\lim_{y \rightarrow a} |g(y)| = +\infty$ ook $\frac{f(y)}{g(y)}$ begrensd. Verder is $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f(x)}{g(x) - g(y)} - \frac{f(y)}{g(y)} \cdot \frac{g(x)}{g(x) - g(y)}$ dus dit nadert tot nul als $y \rightarrow a$. Er is dus een $\delta_2 > 0$ met $\delta_2 < \delta_1$ zodat voor $|y-a| < \delta_2$ geldt $\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \frac{f(y)}{g(y)} \right| < \frac{1}{2} \varepsilon$. Verder is dan ook $\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - b \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - b \right| < \frac{1}{2} \varepsilon$, dus $\left| \frac{f(y)}{g(y)} - b \right| < \varepsilon$. Dus $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ bestaat en $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ook deze stelling is uit te breiden voor hogere afgeleiden; we gaan daar niet op in. Verder merken we nog op, dat de veronderstelling $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$, die we in (7.7) zouden verwachten, blijkbaar overbodig is.

We keren terug tot $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x$. Nu nemen we $f(x) = \log x$ en $g(x) = \frac{1}{x}$, dan is $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, dus $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -x$. We vinden dus:

$$(7.8) \quad \lim_{x \downarrow 0} x \log x = 0.$$

Vervangt men hierin x door $\frac{1}{y}$ dan volgt uit $y \rightarrow +\infty$ dat $x \downarrow 0$; verder is $x \log x = \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = -\frac{\log y}{y}$. Dus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$. Vervangt men hierin x door y^α ($\alpha > 0$), dan volgt uit $y \rightarrow +\infty$ dat $x \rightarrow +\infty$; verder is $\frac{\log x}{x} = \frac{\log y^\alpha}{y^\alpha} = \alpha \frac{\log y}{y^\alpha}$. We vinden dus:

$$(7.9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \text{ voor } \alpha > 0.$$

Wegens $\lim_{u \downarrow 0} u^{\frac{1}{\alpha}} = 0$ volgt hieruit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^{\frac{1}{\alpha}}}{x} = 0$. Vervangt men hierin x door e^y en α door $\frac{1}{\alpha}$, dan volgt uit $y \rightarrow +\infty$, dat ook $x \rightarrow +\infty$; verder is $\frac{(\log x)^\alpha}{x} = \frac{(\log e^y)^\alpha}{e^y} = \frac{y^\alpha}{e^y}$; We vinden dus

$$(7.10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

De beperking tot $\alpha > 0$ is hier niet nodig, want voor $\alpha \leq 0$ is de stelling evident. De stellingen (7.9) en (7.10) zijn zeer belangrijk. Ze zijn als volgt onder woorden te brengen: voor onbegrensd stijgende positieve x "wint" e^x het op den duur van iedere nog zo grote macht van x en "verliest" $\log x$ het op den duur van iedere nog zo kleine positieve macht van x .

We kunnen het onderzoek van $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (en $-\infty$ analoog) terugbrengen tot $x \downarrow 0$ door x door $\frac{1}{y}$ te vervangen en $\frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})}$ voor $y \downarrow 0$ te behandelen met l'Hospital.

Daar echter $\frac{d}{dy} f\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$ en $\frac{d}{dy} g\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{g'\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}$ is het quotiënt van beide eenvoudig $\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}$. We behoeven de overgang naar y dus helemaal niet te

maken en kunnen eenvoudig $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nemen. Zo hadden we b.v. rechtstreeks $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$ kunnen vinden met $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ voor $x \rightarrow +\infty$.

Opgave 62. Bereken $\lim_{x \downarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\alpha}$ en $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{a+x}}{x}$ ($a > 0$).

Opgave 63. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ voor $x > 0$.

§ 8. Maxima en minima.

In (4.17) hebben we gevonden, dat als een differentieerbare functie in een punt, dat geen randpunt van zijn definitie-interval is, een relatief maximum of een relatief minimum bezit, de afgeleide van de functie daar nul is. De moeilijkheid is, dat deze stelling niet omgekeerd kan worden; in een punt waar de afgeleide nul is, behoeft de functie geen relatief maximum of minimum te bezitten. Door hogere afgeleiden te beschouwen, valt hierover echter wel iets te zeggen, en wel zetten we hier toe het nemen van afgeleiden van de functie zo mogelijk zover voort tot er een afgeleide wordt verkregen die niet nul is. Lukt dat, dan kunnen we inderdaad tot uitspraken komen, zoals in de nu volgende stellingen zal blijken. We gebruiken hierbij weer hulpstelling (7.1).

(8.1) Als $f(x)$ een $2n$ maal differentieerbare functie is ($n \geq 1$), als $f^{(k)}(a) = 0$ voor $1 \leq k \leq 2n-1$ en als $f^{(2n)}(a) \neq 0$, dan heeft als $f^{(2n)}(a) > 0$ de functie $f(x)$ een relatief minimum en als $f^{(2n)}(a) < 0$ de functie $f(x)$ een relatief maximum.

Bewijs: Volgens (7.1) is $f(x) - f(a) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(a)(x-a)^{2n} + (x-a)^{2n} \varepsilon(x) = (x-a)^{2n} \left(\frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(a) + \varepsilon(x) \right)$ met $\varepsilon(a) = 0$ en $\varepsilon(x)$ continu in a . Kies een $\lambda > 0$ zodat voor $|x-a| < \lambda$ geldt

$|\varepsilon(x)| < \frac{1}{2} \frac{1}{(2n)!} |f^{(2n)}(a)|$, dan geldt daar dat $\frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(a) + \varepsilon(x)$ hetzelfde teken heeft als $f^{(2n)}(a)$. Daar bovendien $(x-a)^{2n} > 0$ voor $x \neq a$, geldt voor $|x-a| < \lambda$ en $x \neq a$, dat ook $f(x) - f(a)$ hetzelfde teken heeft als $f^{(2n)}(a)$, waaruit de beweringen van de stelling direct volgen.

(8.2) Als $f(x)$ een $2n+1$ maal differentieerbare functie is, als $f^{(k)}(a) = 0$ voor $1 \leq k \leq 2n$ en als $f^{(2n+1)}(a) \neq 0$, dan is als $f^{(2n+1)}(a) > 0$ de functie $f(x)$ stijgend in a en als $f^{(2n+1)}(a) < 0$ de functie $f(x)$ dalend in a .

Bewijs: Nu geldt $f(x) - f(a) = (x-a)^{2n+1} \left(\frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(a) + \varepsilon(x) \right)$ met $\varepsilon(a) = 0$ en $\varepsilon(x)$ continu in a . Hiermee redeneren we op analoge wijze

verder als in het bewijs van (8.1). Nu is echter $(x-a)^{2n+1} > 0$ als $x > a$ en $(x-a)^{2n+1} < 0$ als $x < a$. De beweringen van de stelling volgen dan weer direct.

We zien dus, dat het er van afhangt of het bij even of oneven orde voor het eerst gebeurt dat de afgeleide $\neq 0$ wordt. De toepasselijkheid van de stellingen kan misgaan, doordat bij het verder differentiëren de differentieerbaarheid ophoudt voordat er een afgeleide gekomen is die $\neq 0$ is of doordat de afgeleiden van alle orden in a gelijk aan nul zijn. Van het laatste geeft opgave 64 een voorbeeld (in dit voorbeeld is de functie in het beschouwde punt minimaal).

Opgave 64. Stel $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 0$. Bewijs, dat voor $x \neq 0$

geldt $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{3n}}$, waarin $P_n(x)$ een polynoom is. Bewijs, dat $f(x)$

ook in 0 willekeurig vaak differentieerbaar is en dat $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle n .

Opgave 65. Ga het gedrag in het punt 1 na van de functies $x^3 - 3x + 3$ en $x^4 - 6x^2 + 8x + 1$.

§ 9. Reeksen. Absolute convergentie. Machtreeksen.

Als a_n een rij is, vormen we daarbij de rij $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$. We noemen dan de rij A_n de reeks $\sum_n a_n$. De a_n heten de termen van de reeks, de A_n de partiële sommen. Als de rij A_n convergeert met limiet A , dan zeggen we dat de reeks $\sum_n a_n$ convergeert met de som A . We schrijven dan ook $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$. Eigenlijk is de theorie van de reeksen dus in wezen geen nieuwe theorie, daar deze op die van de rijen (n.l. die der partiële sommen) terug te brengen is. Omgekeerd is ook iedere rij als een reeks op te vatten. Gaat men n.l. uit van een rij a_n en vormt men hierbij de rij u_n als volgt: $u_1 = a_1$, $u_n = a_n - a_{n-1}$ voor $n > 1$, dan is $U_1 = u_1 = a_1$ en $U_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + \sum_{k=2}^n u_k = a_1 + \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) =$
 $= a_1 + \sum_{k=2}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1 + a_n - a_1 = a_n$ voor $n > 1$, dus de rij a_n is juist de rij der partiële sommen van de rij u_n . Het eigen karakter van de theorie van de reeksen ontstaat, doordat we nu de kwesties samenhangende met convergentie in verband brengen met de termen van de reeks en in plaats van met de partiële sommen.

Een reeks $\sum_n a_n$ is convergent met som A als bij iedere $\varepsilon > 0$ een N te vinden is zodat voor $n > N$ geldt $\left| A - \sum_{k=1}^n a_k \right| < \varepsilon$. Een reeks is echter ook dan en slechts dan convergent, als de partiële sommen een fundamentealrij vormen ((2.3) en (2.4)), dus als bij iedere $\varepsilon > 0$ een N te vin-

den is zodat voor $m > N$ en $n > N$ geldt $\left| \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| < \varepsilon$. Is nu $m > n$ dan is $m = n + p$ waarin p een natuurlijk getal is en $\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. Hieruit volgt:

(9.1) Een reeks $\sum_n a_n$ is dan en slechts dan convergent als bij iedere $\varepsilon > 0$ een N te vinden is zodat voor alle $n > N$ en alle natuurlijke p geldt $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$.

Hieruit volgt dat, evenals bij rijen de begintermen er voor de convergentie niets toe doen. Dat is niet zo vanzelfsprekend als het lijkt; men bedenke slechts, dat, als men b.v. de eerste term van een reeks verandert, daardoor alle partiële sommen veranderen. De convergentie blijft dan wel bewaard, maar, anders dan bij rijen, verandert de som.

(9.2) Als men van een convergente reeks eindig veel termen verandert, is de veranderde reeks convergent, maar de som kan een andere zijn dan die van de oorspronkelijke reeks.

Neemt men in (9.1) nu $p = 1$, dan is $|a_{n+1}| < \varepsilon$, dus voor $n > N+1$ is $|a_n| < \varepsilon$, dus:

(9.3) Als de reeks $\sum_n a_n$ convergeert, geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

We beginnen een reeks in plaats van met de index 1 ook wel eens met een index die een ander geheel getal is en definiëren $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$

Uit (9.1) volgt weer, dat het geen invloed op de convergentie heeft met welke index we beginnen. Verder geldt voor $m_1 < m_2$ dat $\sum_{k=m_1}^n a_k = \sum_{k=m_1}^{m_2-1} a_k + \sum_{k=m_2}^n a_k$. Hieruit volgt:

(9.4) Als p en q gehele getallen zijn met $p < q$ dan bestaan $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ en $\sum_{k=q}^{\infty} a_k$ beide wel of beide niet en als beide wel bestaan geldt $\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \sum_{k=p}^{q-1} a_k + \sum_{k=q}^{\infty} a_k$.

Verder kunnen we de termen van een convergente reeks in groepjes opeenvolgende termen bij elkaar nemen; dit heeft alleen tot gevolg dat de rij der partiële sommen vervangen wordt door een deelrij, die convergent is met dezelfde limiet. Het omgekeerde proces van splitsing is evenwel niet geoorloofd. Zo is b.v. de reeks $\sum_n 0$ convergent, maar $\sum_n (-1)^n$ niet en toch ontstaat uit de laatste reeks als we telkens groepjes van twee opeenvolgende termen bij elkaar nemen, de reeks $\sum_n 0$.

Als voorbeeld van een reeks beschouwen we de meetkundige reeks $\sum_n a^n$. Voor $a \neq 1$ geldt $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ (bewijzen met volledige inductie)

Verder geldt voor $|a| < 1$, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ (dit volgt direct uit de eigenschappen van de functie a^x); voor $|a| \geq 1$ geldt dit zeker niet wegens $|a^n| \geq 1$. Voor $|a| \geq 1$ kan de reeks dus, wegens (9.3), zeker niet convergeren. Voor $|a| < 1$ echter volgt uit bovenstaande formule direct dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Beschouw nu de reeks $\sum_n \frac{1}{n(n+1)}$. Nu is $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, dus

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Dus $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

(9.5) Als $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ convergeren met sommen resp. A en B, dan convergeert $\sum_n (a_n + b_n)$ met som A + B.

(9.6) Als $\sum_n a_n$ convergeert met som A, dan convergeert $\sum_n c a_n$ met som cA.

Opgave 66. Bewijs (9.5) en (9.6).

Een reeks $\sum_n a_n$ heet absoluut convergent, als $\sum_n |a_n|$ convergent is.

(9.7) Als een reeks absoluut convergeert, convergeert hij.

Bewijs: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right|$. Pas vervolgens

(9.1) toe.

(9.8) (Majorantcriterium) Als $b_n \geq 0$ voor alle n, als $\sum_n b_n$ convergeert en als voor a_n geldt dat er een N bestaat zodat voor alle $n > N$ geldt $|a_n| \leq b_n$, dan convergeert $\sum_n a_n$ absoluut (de reeks $\sum_n b_n$ heet dan een majorant van de reeks $\sum_n a_n$).

Bewijs: Voor $n > N$ geldt $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right|$. Pas

vervolgens (9.1) toe.

Hieruit volgt dat $\sum_n \frac{1}{n^2}$ convergeert, want $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$. De

harmonische reeks $\sum_n \frac{1}{n}$ evenwel is divergent, want $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} =$

$$= 1 + \sum_{j=1}^n \sum_{m=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{m} \geq 1 + \sum_{j=1}^n 2^{j-1} \cdot \frac{1}{2^j} = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}n$$

en dit

gaat naar $+\infty$ als $n \rightarrow \infty$. We zien aan dit voorbeeld tevens dat (9.3) niet omkeerbaar is; deze reeks is divergent en toch convergeren de termen naar nul.

(9.9) (Machtswortelcriterium van Cauchy) Als voor een rij a_n geldt:

1° er is een $C < 1$ en een N zodat voor $n > N$ geldt $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq C$,

dan is de reeks $\sum_n a_n$ absoluut convergent. Als voor een rij a_n geldt:

2° bij iedere N is een $n > N$ zodat $|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$,

dan is de reeks $\sum_n a_n$ divergent.

Opmerking: Er zijn rijen a_n , die noch in geval 1° , noch in geval 2° verkeren, b.v. $a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$. Daarover zegt (9.9) dus niets.

Bewijs: Laat 1° vervuld zijn; voor $n > N$ geldt dan $|a_n| \leq c^n$. De reeks $\sum_n a_n$ is dan gemajoreerd met de meetkundige reeks $\sum_n c^n$ met $|c| \leq 1$. Volgens (9.8) is $\sum_n a_n$ absoluut convergent. Laat nu 2° vervuld zijn, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ onmogelijk (immers uit $|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$ volgt $|a_n| \geq 1$), dus is $\sum_n a_n$ divergent.

Het criterium (9.9) wordt bijzonder eenvoudig, als de rij $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ convergeert. Stel dan n.l. eerst $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = a < 1$, dan is er een N zodat voor $n > N$ geldt $||a_n|^{\frac{1}{n}} - a| < \frac{1}{2}(1-a)$, dus $|a_n|^{\frac{1}{n}} < 1 - \frac{1}{2}(1-a) < 1$, dus de rij a_n verkeert in geval 1° . Stel nu $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = a > 1$, dan is er een N zodat voor $n > N$ geldt $|a - |a_n|^{\frac{1}{n}}| < a-1$, dus $|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, dus de rij a_n verkeert in geval 2° . Dit geeft ons:

(9.10) Als voor een rij a_n geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = a$ bestaat, dan is als

$a < 1$ de reeks $\sum_n a_n$ absoluut convergent en als $a > 1$ de reeks $\sum_n a_n$ divergent.

(9.11) (Quotiëntcriterium van d'Alembert) Als voor een rij a_n geldt $a_n \neq 0$ voor alle n en

1° er is een $C < 1$ en een N zodat voor $n > N$ geldt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq C$,

dan is de reeks $\sum_n a_n$ absoluut convergent. Als voor een rij a_n geldt $a_n \neq 0$ voor alle n en

2° er is een N zodat voor $n > N$ geldt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$,

dan is de reeks $\sum_n a_n$ divergent.

Opmerking: Ook hier zijn er rijen a_n die noch in geval 1° , noch in geval 2° verkeren, b.v. $a_n = \frac{1}{n}$.

Bewijs: Laat 1° vervuld zijn, dan geldt voor $n > N$ blijkbaar

$|a_n| \leq |a_{N+1}| C^{n-N-1}$ (volledige inductie naar $n-N$). Noem $n = N+1+p$ dan is dus $|a_n| \leq |a_{N+1}| C^p$ voor $n > N$. De reeks $\sum_n a_n$ is dus gemajoreerd met de reeks $\sum_p |a_{N+1}| C^p = |a_{N+1}| \sum_p C^p$, die convergeert. Dus $\sum a_n$ convergeert absoluut. Laat 2° vervuld zijn, dan geldt voor $n > N$ blijkbaar

$|a_n| \geq |a_{N+1}| > 0$, dus is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ onmogelijk, dus is $\sum_n a_n$ divergent.

Op geheel analoge wijze als bij het machtswortelcriterium vinden we nu:

(9.12) Als voor een rij a_n geldt, dat $a_n \neq 0$ voor alle n en dat

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$ bestaat, dan is als $a < 1$ de reeks $\sum_n a_n$ absoluut convergent en als $a > 1$ de reeks $\sum_n a_n$ divergent.

Men kan bewijzen dat het criterium van Cauchy "sterker" is dan dat van d'Alembert, n.l. dat iedere rij a_n die in geval 1° van (9.11) verkeert ook in geval 1° van (9.9) verkeert (hetgeen wij hier niet zullen bewijzen), d.w.z. dat van iedere reeks, waarvan de convergentie met het criterium van d'Alembert kan worden aangetoond, de convergentie ook met het criterium van Cauchy kan worden aangetoond. Verder bestaan er reeksen, waarvan de convergentie wel met het criterium van Cauchy, maar niet met het criterium van d'Alembert kan worden aangetoond. Hiervan wordt een voorbeeld gegeven in opgave 67.

Opgave 67. Bewijs de rij $a_n = 2^{-n}(-1)^n$ in geval 1° van (9.9) maar niet in geval 1° van (9.11) verkeert.

Verder kan men bewijzen, dat, als $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$ bestaat, ook $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ bestaat en $= a$. Wij voeren dit niet uit.

Opgave 68. Onderzoek de convergentie van $\sum_n \frac{1}{n!}$, $\sum_n \frac{n!}{(2n)!}$, $\sum_n \frac{1}{n^n}$.

We kunnen als termen van een reeks ook functies nemen en de reeks $\sum_n f_n(x)$ beschouwen. Voor elke waarde van x waarvoor alle functies gedefinieerd zijn, staat er een reeks met getallen als termen. Voor die waarden van x waarvoor alle functies gedefinieerd zijn en de reeks convergeert kunnen we schrijven $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Ook hier weer kunnen we een reeks met een andere index dan 1 laten beginnen.

Een belangrijk geval hiervan is de machtreeks $\sum_n a_n(x-b)^n$ waarin b en de a_n getallen zijn en x een veranderlijke is. We laten deze reeks met de index 0 beginnen. De eerste belangrijke vraag is, voor welke waarden van x deze reeks convergeert. We behandelen dit met het criterium van Cauchy. Daartoe moeten we $|a_n|^{\frac{1}{n}}|x-b|$ beschouwen. We bewijzen eerst, dat, als voor $a_n r^n$ met $r > 0$ geval 2° van (9.9) niet geldt (d.w.z. er is een N zodat voor $n > N$ geldt $|a_n|^{\frac{1}{n}} r < 1$), dan voor iedere x met $|x-b| < r$ voor $a_n(x-b)^n$ geval 1° van (9.9) geldt, dus de machtreeks absoluut convergent is. Dit volgt direct uit het feit dat voor $n > N$ geldt $|a_n|^{\frac{1}{n}}|x-b| \leq \frac{|x-b|}{r} < 1$. We nemen nu de verzameling V van die positieve getallen r , waarvoor geldt dat voor $a_n r^n$ geval 2° van (9.9) niet geldt. (Als dergelijke getallen niet bestaan, is $\sum_n a_n(x-b)^n$ blijkbaar alleen convergent voor $x=b$.) Als V begrensd is, noemen we R de bovenste grens van V . Voor alle x met $|x-b| > R$

is $\sum_n a_n(x-b)^n$ dan divergent. Als $|x-b| < R$, kunnen we een getal r uit V nemen, zodat $|x-b| < r \leq R$. Volgens het bovenstaande is dan $\sum_n a_n(x-b)^n$ absoluut convergent. Als V niet begrensd is, beredeneren we op analoge wijze dat voor alle x geldt dat $\sum_n a_n(x-b)^n$ absoluut convergent is. Hiermee is het volgende gevonden:

(9.13) Voor een machtreeks $\sum_n a_n(x-b)^n$ geldt dat hetzij voor alle x absolute convergentie optreedt hetzij er een getal $R \geq 0$ bestaat zodat voor $|x-b| < R$ absolute convergentie en voor $|x-b| > R$ divergentie optreedt.

Uit (9.13) blijkt dat de waarden van x waarvoor convergentie optreedt steeds een interval vormen, en dat als het interval begrensd is, b er het middelpunt van is. Over de randpunten van het interval wordt niets gezegd; deze moeten van geval tot geval onderzocht worden, waarbij blijkt dat zowel convergentie als divergentie kan optreden. Men noemt de R uit (9.13) de convergentiestraal van de machtreeks en b het middelpunt. Als de machtreeks voor alle x convergeert, noemt men de convergentiestraal oneindig. In dat geval voldoen alle x aan $|x-b| < R$.

Als $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ convergeert met limiet a kunnen we de convergentiestraal eenvoudig bepalen. We moeten n.l. de bovenste grens R bepalen van die $r > 0$ waarvoor een N bestaat zodat voor $n > N$ geldt $|a_n|^{\frac{1}{n}} r < 1$. Blijkbaar is dat $\frac{1}{a}$ als $a \neq 0$ en oneindig als $a = 0$.

Opgave 69. Bewijs dat als $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = a$ bestaat, de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_n a_n(x-b)^n$ gelijk is aan $\frac{1}{a}$ als $a \neq 0$ en oneindig is als $a = 0$.

Op geheel analoge wijze kan men inzien dat als $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ convergeert met limiet a de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_n a_n(x-b)^n$ gelijk is aan $\frac{1}{a}$ als $a \neq 0$ en oneindig is als $a = 0$. We voeren dit niet uit.

Opgave 70. Bepaal de convergentiestralen van $\sum_n x^n$, $\sum_n \frac{x^n}{n}$, $\sum_n \frac{x^n}{n^2}$, $\sum_n \frac{x^n}{n!}$, $\sum_n n! x^n$, $\sum_n \frac{x^n}{n^n}$, $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

Het eerste en het derde geval van opgave 70 geven voorbeelden van machtreeksen die in de randpunten van hun convergentie-interval niet resp. wel convergeren. Het tweede geval geeft een voorbeeld van een machtreeks die in één randpunt wel en in één randpunt niet convergeert (dit bewijzen we later).

Als de convergentiestraal R van de machtreeks $\sum_n a_n(x-b)^n$ niet nul is, stelt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ voor $|x-b| < R$ (of voor alle x als R oneindig is) een functie van x voor. We zullen aantonen, dat deze functie differentieerbaar is en dat de afgeleide gevonden wordt door elke term van de

reeks afzonderlijk te differentiëren d.w.z. dat de afgeleide gelijk is aan $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-b)^n$. We zullen daartoe eerst bewijzen, dat de reeksen

$\sum_n a_n(x-b)^n$ en $\sum_n (n+1)a_{n+1}(x-b)^n$ dezelfde convergentiestraal bezitten.

Noem hun convergentiestralen R , resp. R_1 . Laat voor een zekere x gelden, dat $a_n(x-b)^n$ in geval 1° van (9.9) verkeert, dus dat er een $C < 1$ en een N is zodat voor $n > N$ geldt $|a_n||x-b| \leq C$. Dan geldt voor $n > N$ dat

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} |x| |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = (n+1)^{\frac{1}{n}} |x|^{\frac{1}{n}} (|x| |a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} \leq (n+1)^{\frac{1}{n}} |x|^{-\frac{1}{n}} C^{\frac{n+1}{n}}.$$

Dit laatste convergeert naar C als $n \rightarrow \infty$ (ga dit na; bedenk dat $(n+1)^{\frac{1}{n}} = \frac{\log(n+1)}{n}$).

Er is dus een $N_1 \geq N$ zodat voor $n > N_1$ geldt

$(n+1)^{\frac{1}{n}} |x| |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2}(1+C) < 1$. Als dus $\sum_n a_n(x-b)^n$ voor een zekere x absoluut convergeert, dan convergeert ook $\sum_n (n+1)a_{n+1}(x-b)^n$ absoluut.

Hieruit volgt $R \leq R_1$. Op geheel analoge wijze bewijst men, dat $R_1 \leq R$.

(9.14) De machtreeksen $\sum_n a_n(x-b)^n$ en $\sum_n (n+1)a_{n+1}(x-b)^n$ hebben dezelfde convergentiestraal.

Laat R de gemeenschappelijke convergentiestraal van $\sum_n a_n(x-b)^n$ en $\sum_n (n+1)a_{n+1}(x-b)^n$ zijn. Kies nu een c binnen het convergentie-interval en een $r > 0$ zodat $|c-b| < r < R$. Bij een $\varepsilon > 0$ is een N te vinden zodat voor iedere $m > N$ geldt $\sum_{k=N}^{m-1} (k+1) |a_{k+1}| r^k < \frac{1}{4} \varepsilon$ en verder

$$\sum_{k=N}^{\infty} (k+1) |a_{k+1}| r^k < \frac{1}{4} \varepsilon. \text{ Dan is ook } \left| \sum_{k=N}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (c-b)^k \right| \leq$$

$\sum_{k=N}^{\infty} (k+1) |a_{k+1}| r^k < \frac{1}{4} \varepsilon$ en wegens de middelwaardestelling van de differentiaalrekening is er bij iedere $x \neq c$ met $|x-b| < r$ een ξ tussen c en x (waarvoor dus geldt $|\xi-b| < r$), zodat

$$\left| \frac{\sum_{k=N+1}^m a_k(x-b)^k - \sum_{k=N+1}^m a_k(c-b)^k}{x-c} \right| = \left| \sum_{k=N}^{m-1} (k+1) a_{k+1} (\xi-b)^k \right| \text{ en dit laatste}$$

is als boven weer $< \frac{1}{4} \varepsilon$. We kiezen nu een $\delta > 0$ zodat $\delta < r - |c-b|$ en zodat voor alle x met $|x-c| < \delta$ en $x \neq c$ geldt

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^N a_k(x-b)^k - \sum_{k=0}^N a_k(c-b)^k}{x-c} - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) a_{k+1} (c-b)^k \right| < \frac{1}{4} \varepsilon. \text{ Voor deze } x$$

geldt verder $|x-b| \leq |x-c| + |c-b| < r$. Bij een dergelijke x is een (mogelijk van x afhankelijke!) $M > N$ te vinden zodat geldt

$$\left| \frac{\sum_{k=M+1}^{\infty} a_k(x-b)^k - \sum_{k=M+1}^{\infty} a_k(c-b)^k}{x-c} \right| < \frac{1}{4} \varepsilon. \text{ Voor een dergelijke } x \text{ geldt dan}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (c-b)^k}{x-c} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (c-b)^k \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{\sum_{k=M+1}^{\infty} a_k (x-b)^k - \sum_{k=M+1}^{\infty} a_k (c-b)^k}{x-c} \right| + \left| \frac{\sum_{k=N+1}^M a_k (x-b)^k - \sum_{k=N+1}^M a_k (c-b)^k}{x-c} \right| + \\
& + \left| \frac{\sum_{k=0}^N a_k (x-b)^k - \sum_{k=0}^N a_k (c-b)^k}{x-c} - \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) a_{k+1} (c-b)^k \right| + \\
& + \left| \sum_{k=N}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (c-b)^k \right| < \varepsilon. \text{ Hieruit volgt dat } \left[\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k \right]_{x=c} = \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (c-b)^k. \text{ Dit geeft ons de volgende stelling:}
\end{aligned}$$

(9.15) Als R de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_n a_n (x-b)^n$ is, dan is de functie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$, gedefinieerd voor alle x met $|x-b| < R$, differentieerbaar met afgeleide $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-b)^n$.

Let wel dat voor de randpunten van het convergentie-interval niets bewezen is, ook niet als de reeks daar nog convergeert.

Daar de afgeleide weer een machtreeks is kunnen we op de afgeleide nogmaals (9.15) toepassen. Zo voortgaande vinden we dat

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n \text{ willekeurig vaak differentieerbaar is met als } k^{\text{e}} \text{ afge-} \\
\text{leide } f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!} a_{k+n} (x-b)^n.
\end{aligned}$$

§10. Reeksen van Taylor.

We willen proberen een functie $f(x)$ als een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ te schrijven. We weten, dat als dat kan, dus als $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$, er geldt $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!} a_{k+n} (x-b)^n$, dus $f^{(k)}(b) = k! a_k$, dus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(b) (x-b)^n$.

Van een $n-1$ maal differentieerbare functie $f(x)$ noemen we nu $f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(b) (x-b)^k = R_n(x)$ de n^{e} restterm van $f(x)$ in b . In

(7.1) hebben we bewezen, dat er geldt $R_n(x) = (x-b)^{n-1} \varepsilon(x)$, zodat $\varepsilon(b)=0$ en $\varepsilon(x)$ continu in b is. Onder de veronderstelling dat $f(x)$ n maal differentieerbaar is met continue n^{e} afgeleide zullen we nu meer bewijzen.

(10.1) (Formule van Taylor met restterm in integraalvorm) Als de functie $f(x)$ n maal differentieerbaar is met continue n^{e} afgeleide, dan is $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(b) (x-b)^k + \frac{1}{(n-1)!} (x-b)^n \int_0^1 f^{(n)}(b+\tau(x-b)) (1-\tau)^{n-1} d\tau$.

Bewijs: Daar voor $x \neq b$ geldt $\int_0^1 f'(b+\tau(x-b))d\tau = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$, is de formule juist voor $n = 1$. Verder vinden we door partiële integratie, als $f(x)$ $n+1$ maal differentieerbaar is met continue $(n+1)^e$ afgeleide,
$$\int_0^1 f^{(n)}(b+\tau(x-b))(1-\tau)^{n-1} d\tau = \frac{1}{n} f^{(n)}(b) + \frac{1}{n}(x-b) \int_0^1 f^{(n+1)}(b+\tau(x-b))(1-\tau)^n d\tau.$$
 Aannemende dat de formule voor n juist is, vinden we met behulp hiervan direct de formule voor $n+1$.

Om de restterm van (10.1) in een andere vorm te brengen, hebben we enige stellingen over integralen nodig.

(10.2) Als $f(x)$ en $g(x)$ integreerbare functies zijn, gedefinieerd op (a,b) en als $f(x) \leq g(x)$ voor alle x in (a,b) , dan geldt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Bewijs: Het volgt direct uit de definitie van integralen.

(10.3) Als $f(x)$ en $g(x)$ continue functies zijn, gedefinieerd op $[a,b]$ en als $g(x) \geq 0$ voor alle x in $[a,b]$, dan is er een ξ in $[a,b]$ zodat
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Bewijs: Volgens (3.13) heeft $f(x)$ een minimum en een maximum, dat we m , resp. M noemen. Dan is $m \leq f(x) \leq M$, dus $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Volgens (10.2) is nu $m \int_a^b g(x)dx = \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx = M \int_a^b g(x)dx$. Als $\int_a^b g(x)dx = 0$, volgt hieruit $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ en de stelling is juist voor iedere keuze van ξ . Als $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, dan is, wegens $g(x) \geq 0$, $\int_a^b g(x)dx > 0$, dus $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$. Uit (3.10),

toegepast op een interval welks randpunten punten zijn waar $f(x)$ de waarden m en M aanneemt, volgt dat er een ξ bestaat, waarvoor

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}, \text{ dus } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Passen we dit toe op $\int_0^1 f^{(n)}(b+\tau(x-b))(1-\tau)^{n-1}d\tau$ met $f^{(n)}(b+\tau(x-b))$ als ene factor en $(1-\tau)^{n-1}$ als andere factor, dan vinden we, dat er een η met $0 \leq \eta \leq 1$ is, zodat $\int_0^1 f^{(n)}(b+\tau(x-b))(1-\tau)^{n-1}d\tau = \frac{1}{n} f^{(n)}(b+\eta(x-b))$. De grootheid $b+\eta(x-b)$ stelt voor $0 \leq \eta \leq 1$ juist een ξ tussen x en b voor (met inbegrip van x en b zelf). Dit geeft ons de volgende stelling:

(10.4) (Formule van Taylor met restterm van Lagrange) Als de functie $f(x)$ n maal differentieerbaar is met continue n^e afgeleide en als we

$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(b)(x-b)^k$ stellen, dan geldt $R_n(x) =$
 $= \frac{1}{n!} f^{(n)}(b + \vartheta(x-b))(x-b)^n$, waarin $0 \leq \vartheta \leq 1$ en $R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-b)^n$,
 waarin ξ tussen x en b ligt of $\xi = x$ of $\xi = b$.

Passen we nogmaals (10.3) toe op $\int_0^1 f^{(n)}(b + \tau(x-b))(1-\tau)^{n-1} d\tau$,
 nu echter met $f^{(n)}(b + \tau(x-b))(1-\tau)^{n-1}$ als ene factor en 1 als andere
 factor, dan vinden we, dat er een ϑ met $0 \leq \vartheta \leq 1$ is, zodat
 $\int_0^1 f^{(n)}(b + \tau(x-b))(1-\tau)^{n-1} d\tau = f^{(n)}(b + \vartheta(x-b))(1-\vartheta)^{n-1}$. Stellen we
 weer $\xi = b + \vartheta(x-b)$, dan is $1 - \vartheta = \frac{x-\xi}{x-b}$. Dit geeft de volgende stelling:
 (10.5) (Formule van Taylor met restterm van Cauchy) Als de functie $f(x)$
 n maal differentieerbaar is met continue n^e afgeleide en als we $R_n(x) =$
 $= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(b)(x-b)^k$ stellen, dan geldt $R_n(x) =$
 $= \frac{1}{(n-1)!} (x-b)^{n-1} (1-\vartheta)^{n-1} f^{(n)}(b + \vartheta(x-b))$, waarin $0 \leq \vartheta \leq 1$ en $R_n(x) =$
 $= \frac{1}{(n-1)!} (x-b)(x-\xi)^{n-1} f^{(n)}(\xi)$, waarin ξ tussen x en b ligt of $\xi = x$
 of $\xi = b$.

Door de integrand van de integraal in (10.1) op een andere wijze
 in twee factoren te splitsen, zijn nog andere vormen van de restterm te
 verkrijgen. We gaan daar niet op in.

Als $f(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar is, heet
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)(x-b)^n$ de reeks van Taylor in het punt b behorende bij
 $f(x)$. Als $b = 0$, spreekt men ook wel van de reeks van Mac Laurin. Dan is
 $R_n(x)$ gedefinieerd voor iedere n . Als dan voor een zekere x geldt
 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, dan is voor die x te schrijven $f(x) =$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)(x-b)^n$; men zegt dan dat voor die x de functie $f(x)$ door
 zijn reeks van Taylor wordt voorgesteld.

Als voorbeeld nemen we $f(x) = e^x$, dan is $f^{(n)}(x) = e^x$ voor iedere n
 en wij krijgen $e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k + R_n(x)$, waarin volgens Lagrange geldt
 $R_n(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{\vartheta x}$ met $0 \leq \vartheta \leq 1$. Nus is $e^{\vartheta x}$ voor iedere vaste x begrensd
 en $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} x^n = 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Hieruit volgt:

$$(10.6) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$\text{Speciaal is } e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

Waarschuwing: Opdat een functie door zijn reeks van Taylor voorge-
 steld wordt, is het niet voldoende dat deze reeks convergeert. Neem bij
 voorbeeld de functie $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 0$ uit opgave 64.
 Voor deze functie geldt $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle n . De reeks van Mac Laurin
 convergeert naar nul voor iedere x , omdat al zijn coëfficiënten nul zijn

en stelt de functie alleen voor $x = 0$ voor. Als echter voor een functie $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ voor een zekere x kan worden aangetoond, dan volgt daaruit voor die x zowel de convergentie van de reeks als de gelijkheid van de som met $f(x)$.

Opgave 71. Bepaal de reeksen van Mac Laurin van $\sin x$ en $\cos x$ en bewijs dat deze de functies voorstellen.

Opgave 72. Bepaal de reeks van Mac Laurin van $\frac{1}{1-x}$. Voor welke waarden van x stelt deze de functie voor?

In de praktijk gebruikt men reeksontwikkelingen van functies om benaderingen van deze functies te vinden en wel gebruikt men partiële sommen van de reeks als benadering. De fout is dan juist $R_n(x)$. Door een bovengrens van $R_n(x)$ te bepalen, vinden we een bovengrens voor de fout: de restterm wordt gebruikt als restschatting. Laat b.v. gevraagd zijn een benaderde waarde van e te bepalen met een fout $< 10^{-4}$. Nu is $e = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + R_n$ met $R_n = \frac{1}{n!} e^n$. Nu weten we dat $e < 4$, dus $0 < R_n < \frac{4}{n!}$.

Als dus n zo groot is, dat $\frac{4}{n!} < 10^{-4}$, d.w.z. $n! > 40000$, dan is zeker $0 < R_n < 10^{-4}$. Nu is $8! = 40320$, dus $n = 8$ voldoet. Nu is $\sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!} = \frac{13700}{5040} = 2,71825\dots$, dus $2,71825 < e < 2,71835$.

We willen nu $\log(1+x)$ in een reeks van Mac Laurin ontwikkelen. Stel $f(x) = \log(1+x)$, dan is $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, zoals met volledige inductie direct is aan te tonen. Dus is $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(x)$.

Nu is de convergentiestraal van $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ gelijk aan 1 (ga dat na); we kunnen ons dus direct tot x met $|x| \leq 1$ beperken. Voor $|x| < 1$ gebruiken we de restterm van Cauchy: $R_n(x) = (-1)^{n-1} x^n \frac{(1-x)^{n-1}}{(1+x)^n}$. Nu is,

wegens $x > -1$, $0 \leq 1-x < 1+x$ en dus $0 \leq \frac{(1-x)^{n-1}}{(1+x)^n} < 1$, dus $|R_n(x)| \leq |x|^n \frac{1}{1+x} \leq \frac{|x|^n}{1-|x|}$. Daar $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ geldt ook $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Voor

$x = -1$ is de reeks divergent ($-\sum_n \frac{1}{n}$); voor $x = 1$ gebruiken we de rest-

term van Lagrange: $R_n(1) = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+x)^n}$ en $|R_n(1)| \leq \frac{1}{n}$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(1) = 0$.

(10.7) (Logarithmische reeks) Voor $-1 < x \leq 1$ geldt $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \dots$.

Hieruit volgt: $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

In deze reeks vinden we een voorbeeld van een reeks, die convergeert, maar niet absoluut convergeert.

Opgave 73. Bereken een benaderde waarde voor $\log \frac{1}{2}$ met een fout, die kleiner is dan $\frac{1}{100}$.

Voor $-1 \leq x < 1$ geldt $\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

Door aftrekking vindt men hieruit, dat voor $-1 < x < 1$ geldt $\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots)$. Met deze formule is $\log u$ te bepalen voor alle $u > 0$. Stellen we n.l. $x = \frac{u-1}{u+1}$, dan is $u = \frac{1+x}{1-x}$ en, wegens $-u-1 < u-1 < u+1$ is $-1 < \frac{u-1}{u+1} < 1$. Als echter u enigszins groot wordt, komt de x dicht bij 1 te liggen en convergeert de reeks zeer langzaam.

Om een logarithmentafel te maken, moet men in een zekere benadering de logarithmen bepalen van een stel rationale getallen. Op grond van de eigenschappen van de logarithme is het daarvoor voldoende de logarithmen van de natuurlijke en zelfs van de ondeelbare natuurlijke getallen (z.g. priemgetallen) te kennen. Om de logarithme van een priemgetal p te bepalen, als die van de kleinere priemgetallen bekend zijn, kan men b.v. als volgt te werk gaan: $p = \frac{p-1}{1-\frac{1}{p}}$, dus $\log p = \log(p-1) - \log(1-\frac{1}{p})$. Nu is $p-1$ een product van priemfactoren $< p$ en $\log(p-1)$ dus bekend; $\log(1-\frac{1}{p})$ berekent men door in de reeks van $\log(1-x)$ te substitueren $x = \frac{1}{p}$. Voor niet te kleine p convergeert deze laatste reeks zeer goed. Voor $p > 2$ is het procédé nog iets te verbeteren, want dan is ook $p+1$ een product van priemfactoren $< p$; men stelt dan $p^2 = \frac{(p-1)(p+1)}{1-\frac{1}{p^2}}$. Voor kleine p is de

methode nog niet zo bruikbaar, omdat de reeksen langzaam convergeren; Voor deze getallen bestaan er andere kunstgrepen om de berekening te bekorten. We gaan daar niet op in.

We geven nu een afleiding van de reeksontwikkeling van $\log(1+x)$, die eenvoudiger is dan de bovenstaande, maar die niet voor $x = 1$ geldig is. De functies $\log(1+x)$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ zijn beide voor $-1 < x < 1$ gedefinieerd en differentieerbaar. De eerste heeft afgeleide $\frac{1}{1+x}$; van de tweede kan de afgeleide bepaald worden volgens (9.15), hetgeen $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ oplevert. Maar voor $-1 < x < 1$ geldt $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ (meetkundige reeks). Beide functies hebben dus dezelfde afgeleide en zijn dus op een additieve constante na aan elkaar gelijk. Door $x = 0$ te substitueren, ziet men dat de constante nul is, dus $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ voor $-1 < x < 1$.

Dat deze afleiding mogelijk is, berust op het feit, dat de afgeleide van $\log(1+x)$ een zo eenvoudige functie is, dat de geldigheid van de reeksontwikkeling daarvoor onmiddellijk duidelijk is. Bij andere functies zal de methode meestal niet tot vereenvoudiging leiden.

We willen nu $(1+x)^{\alpha}$ (α willekeurig reëel) in een reeks van MacLaurin ontwikkelen. Stel $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, dan is $f^{(n)}(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha-j)(1+x)^{\alpha-n}$. We definiëren nu een binomiaalcoëfficiënt $\binom{\alpha}{n}$ voor reële α en natuurlijke n door $\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha-j)}{n!}$; verder $\binom{\alpha}{0} = 1$. Dan is $(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x)$.

Als α een natuurlijk getal of nul is ($\alpha = m$), dan bevat $\binom{m}{k}$ voor $k > m$ een factor $m-m=0$, dus dan is $\binom{m}{k}=0$ voor $k > m$. De reeks wordt dan een eindige som. Verder geldt voor $n > m$ dat $R_n(x) = 0$, zoals direct blijkt uit het feit dat $f^{(n)}(x) = 0$ voor alle x . De reeks stelt voor alle reële x de functie voor en we krijgen de uit de algebra bekende formule $(1+x)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n$ (binomiaalformule van Newton). We sluiten nu

verder het geval dat α natuurlijk of nul is uit. Dan is $\binom{\alpha}{n} \neq 0$ voor alle n . Om de convergentiestraal van de reeks te bepalen beschouwen we $\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} \right| = \frac{|\alpha - n|}{n+1}$ en dit is voor $n > \alpha$ gelijk aan $\frac{n-\alpha}{n+1}$, hetgeen naar 1 na-

dert voor $n \rightarrow \infty$. De convergentiestraal is dus 1 en we mogen ons tot $|x| \leq 1$ beperken. Voor $|x| < 1$ beschouwen we de restterm van Cauchy:

$R_n(x) = n \binom{\alpha}{n} x^n (1-x)^{n-1} (1+x)^{\alpha-n} = \alpha \binom{\alpha-1}{n-1} x^n \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-1} (1+x)^{\alpha-1}$. Evenals bij de logaritmische reeks zien we dat $0 \leq \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-1} \leq 1$. Verder geldt, wegens de convergentie van $\sum_n \binom{\alpha-1}{n} x^n$, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{\alpha-1}{n-1} x^{n-1} = 0$,

dus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Dit geeft de volgende stelling:

(10.8) (Binomiaalreeks) Voor $-1 < x < 1$ geldt $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

Voor $x = -1$ is $(1+x)^\alpha$ niet gedefinieerd als α geen natuurlijk getal is. Men kan bewijzen dat de formule van (10.8) voor $x = 1$ en $\alpha > -1$ nog geldig is. Verder is de reeks voor $x = 1$ en $\alpha \leq -1$ divergent, voor $x = -1$ en $\alpha < 0$ eveneens divergent en voor $x = -1$ en $\alpha > 0$ convergent. We gaan dit niet na.

Om een reeksontwikkeling van $\arcsin x$ te vinden, nemen we zijn afgeleide, die $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}}$ is. Volgens (10.8) geldt voor $-1 < x < 1$, dat $(1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$. Nu geldt echter:

$$(10.9) \quad \binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Opgave 74. Bewijs (10.9).

Dus $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^{2n}$. Voor $-1 < x < 1$ hebben $\arcsin x$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ dezelfde afgeleide; ze zijn dus op een additieve constante na aan elkaar gelijk. Door $x = 0$ in te vullen zien we dat de constante nul is. Dit geeft:

$$(10.10) \quad \text{Voor } -1 < x < 1 \text{ geldt } \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}(2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{35}{1152} x^9 + \dots$$

$$\text{Daar } \sin \frac{1}{6} \pi = \frac{1}{2}, \text{ geldt } \frac{1}{6} \pi = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{4n+1}(2n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \dots$$

Men kan bewijzen, dat (10.10) ook nog voor $x = 1$ en $x = -1$ geldt. We voeren dat niet uit.

Om een reeksontwikkeling van $\arctg x$ te vinden, nemen we zijn afgeleide, die $\frac{1}{1+x^2}$ is. Nu is $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} = \frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)}$ (meetkundige reeks),

dus $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}$. Hieruit volgt direct $\arctg x =$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$. Voor $-1 \leq x \leq 1$ geldt nu

$0 \leq \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1}$. Dus:

(10.11) Voor $-1 \leq x \leq 1$ geldt $\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \dots$.

Daar $\operatorname{tg} \frac{1}{4}\pi = 1$, geldt $\frac{1}{4}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$.

Deze reeks convergeert slechts langzaam. Een beter convergente reeks krijgt men door gebruik te maken van $\frac{1}{4}\pi = 4 \arctg \frac{1}{5} - \arctg \frac{1}{239}$.

§ 11. Functies van meer veranderlijken.

Bij de invoering van het begrip functie hebben we als definitieverzameling S een verzameling reële getallen gekozen. We kunnen echter ook een verzameling S van reële getallen- n -tallen $x_1, \dots, x_n$ kiezen. Als aan ieder getallen- n -tal $x_1, \dots, x_n$ uit S een reëel getal $f(x_1, \dots, x_n)$ is toegevoegd, noemen we deze toevoeging een functie van n veranderlijken. We noemen een getallen- n -tal ook wel een punt (in een n -dimensionale ruimte). Voor functies van twee veranderlijken schrijven we gewoonlijk x, y (i.p.v. x_1, x_2), voor functies van drie veranderlijken x, y, z (i.p.v. x_1, x_2, x_3).

Een functie $f(x_1, \dots, x_n)$, gedefinieerd op een verzameling S , heet continu in $(a_1, \dots, a_n)$ ($(a_1, \dots, a_n)$ is een punt van S), als bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een reëel getal $\delta > 0$ te vinden is, zodat voor alle punten $(x_1, \dots, x_n)$ uit S , waarvoor geldt $|x_j - a_j| < \delta$ ($j = 1, \dots, n$), ook geldt $|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| < \varepsilon$. Als $f(x_1, \dots, x_n)$ continu is in alle punten van S , heet zij continu (zonder nadere toevoeging).

Hiervoor geldt:

(11.1) Een functie $f(x_1, \dots, x_n)$, gedefinieerd op een verzameling S , is dan en slechts dan continu in $(a_1, \dots, a_n)$ ($(a_1, \dots, a_n)$ is een punt van S), als voor ieder n -tal rijen $b_{1m}, \dots, b_{nm}$ (m is de index van de rij), waarvoor geldt dat $(b_{1m}, \dots, b_{nm})$ in S ligt voor alle m en $\lim_{m \rightarrow \infty} b_{jm} = a_j$ ($j = 1, \dots, n$), ook geldt $\lim_{m \rightarrow \infty} f(b_{1m}, \dots, b_{nm}) = f(a_1, \dots, a_n)$.

Het bewijs van (11.1) is volkomen analoog aan dat van de overeenkomstige stelling (3.2). We laten het daarom achterwege.

Op grond van (11.1) kunnen we continuïteit ook met limieten definiëren. Daaruit volgt direct:

(11.2) Als twee functies van n veranderlijken continu in $(a_1, \dots, a_n)$ zijn, zijn hun som, verschil, product en quotiënt ook continu in $(a_1, \dots, a_n)$.

Als $f(x)$ een continue functie van één veranderlijke is, dan is de functie $g(x, y)$ van twee veranderlijken, gedefinieerd door $g(x, y) = f(x)$ ook continu, zoals direct uit de definitie blijkt. Analooch voor $f(x_1, \dots, x_k)$ en $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_k)$ ($n \geq k$).

Verder geldt ook de met (3.8) overeenkomende stelling van de samengestelde functie:

(11.3) Als $f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k)$ continu zijn in $(a_1, \dots, a_k)$, als $g(y_1, \dots, y_n)$ gedefinieerd is in alle punten $(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k))$ en continu is in $(f_1(a_1, \dots, a_k), \dots, f_n(a_1, \dots, a_k))$ dan is $h(x_1, \dots, x_k) = g(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k))$ continu in $(a_1, \dots, a_k)$.

Uit het bovenstaande volgt, dat polynomen en gebroken rationale functies van n veranderlijken continu zijn.

Een functie $f(x, y)$ kunnen we bij constante y als functie van één veranderlijke x en bij constante x als functie van één veranderlijke y beschouwen. Als dan $f(x, b)$ als functie van x in a en $f(a, y)$ als functie van y in b continu is behoeft $f(x, y)$ niet continu in (a, b) te zijn. Een voorbeeld hiervan is de functie $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$ en $f(0, 0) = 0$.

Opgave 75. Bewijs dat de functie $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$ en $f(0, 0) = 0$ niet continu is in $(0, 0)$.

Differentieerbaarheid van functies van meer veranderlijken definiëren we naar analogie van (4.1).

Een functie $f(x_1, \dots, x_n)$ heet gedefinieerd in een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$ als er een $\lambda > 0$ bestaat zodat voor alle punten $(x_1, \dots, x_n)$, waarvoor geldt $|x_j - a_j| < \lambda$ ($j = 1, \dots, n$), de functie $f(x_1, \dots, x_n)$ gedefinieerd is.

Een functie $f(x_1, \dots, x_n)$ heet totaal differentieerbaar in $(a_1, \dots, a_n)$ als zij gedefinieerd is in een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$ en als er n reële getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en n functies $\varepsilon_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varepsilon_n(x_1, \dots, x_n)$ bestaan, die continu in $(a_1, \dots, a_n)$ zijn, en zodat geldt $\varepsilon_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = \varepsilon_n(a_1, \dots, a_n) = 0$ en $f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j - a_j) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \varepsilon_j(x_1, \dots, x_n)$.

Stellen we bij een functie $f(x_1, \dots, x_n)$, die totaal differentieerbaar is in $(a_1, \dots, a_n)$, alle veranderlijken x_j op één na (noem deze x_k) gelijk aan a_j dan blijft er een functie $g(x_k)$ in één veranderlijke x_k over die zeker gedefinieerd is in $(a_k - \lambda, a_k + \lambda)$. Verder geldt $g(a_k) = f(a_1, \dots, a_k)$ en $g(x_k) = g(a_k) + \alpha_k (x_k - a_k) + (x_k - a_k) \eta_k(x_k)$, waarin $\eta_k(x_k)$ uit $\varepsilon_k(x_1, \dots, x_n)$ ontstaat door alle veranderlijken x_j ,

behalve x_k , door a_j te vervangen. Blijkbaar is $y_k(x_k)$ continu in a_k en $y_k(a_k) = 0$. Dus is $g(x_k)$ differentieerbaar in a_k met als afgeleide α_k . Een afgeleide van een functie $f(x_1, \dots, x_n)$, waarin alle veranderlijken op één na vastgehouden worden heet een partiële afgeleide, geschreven $\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$. Dus is $\alpha_k = \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_k}$. De $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ uit de definitie van totale differentieerbaarheid zijn dus volledig bepaald.

Een analoge omstandigheid als bij continuïteit doet zich hier voor: alle partiële afgeleiden van een functie kunnen bestaan zonder dat de functie totaal differentieerbaar is. Een voorbeeld hiervan geeft opgave 76.

Opgave 76. Van de functie $f(x, y)$ gedefinieerd door $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$ en $f(0, 0) = 0$ bestaan de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in alle punten, maar $f(x, y)$ is niet totaal differentieerbaar in $(0, 0)$.

Als de partiële afgeleiden echter continu zijn (tot dit geval zullen wij ons beperken), is de functie wel totaal differentieerbaar. Dit wordt uitgedrukt in de volgende stelling:

(11.4) Als in een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$ alle partiële afgeleiden van $f(x_1, \dots, x_n)$ bestaan en continu zijn in $(a_1, \dots, a_n)$, dan is $f(x_1, \dots, x_n)$ totaal differentieerbaar in $(a_1, \dots, a_n)$.

Bewijs: Uit de middelwaardestelling van de differentiaalrekening en de continuïteit van de partiële afgeleiden in $(a_1, \dots, a_n)$ volgt, dat voor $j = 1, \dots, n$ geldt: $f(x_1, \dots, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) +$

$$- f(x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, \dots, a_n) = (x_j - a_j) \frac{\partial f(x_1, \dots, x_{j-1}, a_j + \vartheta_j(x_j - a_j), a_{j+1}, \dots, a_n)}{\partial x_j} = (x_j - a_j) \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} + (x_j - a_j) \varepsilon_j(x_1, \dots, x_n) \text{ met } 0 < \vartheta_j < 1,$$

$\varepsilon_j(a_1, \dots, a_n) = 0$ en $\varepsilon_j(x_1, \dots, x_n)$ continu in $(a_1, \dots, a_n)$. Door op-

telling vindt men hieruit $f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) =$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} (x_j - a_j) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \varepsilon_j(x_1, \dots, x_n), \text{ waaruit}$$

de totale differentieerbaarheid volgt.

Uit de definitie van totale differentieerbaarheid volgt direct:

(11.5) Een functie die totaal differentieerbaar is in $(a_1, \dots, a_n)$ is continu in $(a_1, \dots, a_n)$.

Op geheel analoge wijze als in de differentiaalrekening in één veranderlijke valt te bewijzen, dat som, verschil, product en quotiënt van totaal differentieerbare functies weer totaal differentieerbaar zijn. Daar het bepalen van partiële afgeleiden een probleem in één veranderlijke is, zijn de formules voor som, verschil, product en quotiënt voor partiële afgeleiden dezelfde als voor gewone afgeleiden. De kettingregel

evenwel vertoont een nieuw aspect. Deze zullen we daarom apart behandelen.

(11.6) Als $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$ alle totaal differentieerbaar zijn in $(a_1, \dots, a_n)$ en als $f(y_1, \dots, y_m)$ gedefinieerd is in alle punten $(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$ en totaal differentieerbaar is in $(g_1(a_1, \dots, a_n), \dots, g_m(a_1, \dots, a_n))$, dan is de functie $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$ totaal differentieerbaar in $(a_1, \dots, a_n)$ en

$$\frac{\partial h(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(g_1(a_1, \dots, a_n), \dots, g_m(a_1, \dots, a_n))}{\partial y_k} \frac{\partial g_k(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j}.$$

Bewijs: Noem $b_k = g_k(a_1, \dots, a_n)$ ($k = 1, \dots, m$), dan is $g_k(x_1, \dots, x_n) = b_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} (x_j - a_j) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \varepsilon_{jk}(x_1, \dots, x_n)$ met $\varepsilon_{jk}(x_1, \dots, x_n)$ continu in $(a_1, \dots, a_n)$ en $\varepsilon_{jk}(a_1, \dots, a_n) = 0$ voor $j = 1, \dots, n$ en $k = 1, \dots, m$. Verder is $f(y_1, \dots, y_m) = f(b_1, \dots, b_m) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(b_1, \dots, b_m)}{\partial y_k} (y_k - b_k) + \sum_{k=1}^m (y_k - b_k) \delta_k(y_1, \dots, y_m)$ met $\delta_k(y_1, \dots, y_m)$ continu in $(b_1, \dots, b_m)$ en $\delta_k(b_1, \dots, b_m) = 0$ voor $k = 1, \dots, m$. Dus $f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) = f(b_1, \dots, b_m) + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f(b_1, \dots, b_m)}{\partial y_k} + \delta_k(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) \right) \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_k(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} + \varepsilon_{jk}(x_1, \dots, x_n) \right) (x_j - a_j) =$

$$= f(g_1(a_1, \dots, a_n), \dots, g_m(a_1, \dots, a_n)) + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f(b_1, \dots, b_m)}{\partial y_k} \frac{\partial g_k(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} \right) (x_j - a_j) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \eta_j(x_1, \dots, x_n),$$

waarin $\eta_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f(b_1, \dots, b_m)}{\partial y_k} \varepsilon_{jk}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_k(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} \delta_k(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) + \sum_{k=1}^m \delta_k(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) \varepsilon_{jk}(x_1, \dots, x_n)$. Blijkbaar is $\eta_j(a_1, \dots, a_n) = 0$ en $\eta_j(x_1, \dots, x_n)$ continu in $(a_1, \dots, a_n)$. Daarmee is de stelling bewezen.

Als we hogere dan eerste afgeleiden gaan beschouwen treedt iets nieuws op, dat bij functies van één veranderlijke niet voorkwam, daar we dan naar verschillende veranderlijken kunnen gaan differentiëren. Zo kunnen we eerst $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ vormen en daarna deze functie partieel naar x_2 differentiëren; het resultaat schrijven we $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$. Algemeen kunnen we zo krijgen $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}$; hierin is eerst naar x_{i_1} dan naar x_{i_2} enz en ten slotte

naar x_{i_n} gedifferentieerd. We schrijven dit ook wel korter $f_{i_1, \dots, i_n}$ (let op de volgorde der indices!)

We gaan nu na in hoeverre de volgorde der differentiaties verwisseld mag worden. Nemen we een functie $f(x,y)$ van twee veranderlijken dan vragen we, in hoeverre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ is. We geven eerst een voorbeeld, dat aantoont dat het gelijktteken niet altijd geldt. Stel $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

voor $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$. Voor $(x,y) \neq (0,0)$ geldt dan

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ en } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \text{ Verder is}$$

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \text{ en } \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0, \text{ dus } \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

$$\text{Ten slotte is } \frac{\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{y} = -1 \text{ en } \frac{\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{x} = 1, \text{ dus}$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = -1 \text{ en } \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 1, \text{ dus } \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}. \text{ Er geldt echter:}$$

(11.7) Als van de functie $f(x,y)$ de partiële afgeleiden f_{12} en f_{21} beide bestaan in een omgeving van (a,b) en continu zijn in (a,b) , dan geldt $f_{12}(a,b) = f_{21}(a,b)$.

Bewijs: Volgens de middelwaardestelling van de differentiaalrekening geldt $(f(x,y) - f(a,y)) - (f(x,b) - f(a,b)) =$
 $= (y-b)(f_2(x, b + \vartheta_1(y-b)) - f_2(a, b + \vartheta_1(y-b))) =$
 $= (y-b)(x-a)f_{21}(a + \vartheta_2(x-a), b + \vartheta_1(y-b)) \text{ met } 0 < \vartheta_1 < 1, 0 < \vartheta_2 < 1.$
 Evenzo geldt $(f(x,y) - f(x,b)) - (f(a,y) - f(a,b)) =$
 $= (x-a)(f_1(a + \vartheta_3(x-a), y) - f_1(a + \vartheta_3(x-a), b)) =$
 $= (x-a)(y-b)f_{12}(a + \vartheta_3(x-a), b + \vartheta_4(y-b)) \text{ met } 0 < \vartheta_3 < 1, 0 < \vartheta_4 < 1.$
 Voor $x \neq a$ en $y \neq b$ volgt hieruit $f_{21}(a + \vartheta_2(x-a), b + \vartheta_1(y-b)) =$
 $= f_{12}(a + \vartheta_3(x-a), b + \vartheta_4(y-b)).$ Uit de continuïteit van f_{12} en f_{21} in (a,b) volgt nu $f_{12}(a,b) = f_{21}(a,b)$.

Door herhaaldelijk toepassen van (11.7) kan men nu, ook voor functies van meer dan twee veranderlijken, alle mogelijke verwisselingen van differentiatievolgorde uitvoeren, mits natuurlijk de veronderstellingen van (11.7) daarbij telkens vervuld zijn.

Laat $f(x_1, \dots, x_n)$ totaal differentieerbaar zijn in de punten $(\lambda b_1 + (1-\lambda)a_1, \dots, \lambda b_n + (1-\lambda)a_n)$ voor alle λ , waarvoor $0 \leq \lambda \leq 1$. Dan is $g(\lambda) = f(\lambda b_1 + (1-\lambda)a_1, \dots, \lambda b_n + (1-\lambda)a_n)$ differentieerbaar met afgeleide (volgens de kettingregel) $\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} =$
 $= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\lambda b_1 + (1-\lambda)a_1, \dots, \lambda b_n + (1-\lambda)a_n)}{\partial x_j} (b_j - a_j).$ Past men de middelwaardestelling der differentiaalrekening toe op $g(\lambda)$ dan vindt men $g(1) - g(0) = g'(\vartheta)$ met $0 < \vartheta < 1$. Hieruit volgt:

(11.8) (Middelwaardestelling der differentiaalrekening met meer veranderlijken) Als $f(x_1, \dots, x_n)$ totaal differentieerbaar is in de punten $(a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \dots, a_n + \lambda(b_n - a_n))$ voor alle λ met $0 \leq \lambda \leq 1$, dan is er een getal ϑ met $0 < \vartheta < 1$, zodat $f(b_1, \dots, b_n) - f(a_1, \dots, a_n) =$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(a_1 + \vartheta(b_1 - a_1), \dots, a_n + \vartheta(b_n - a_n))}{\partial x_j} (b_j - a_j).$$

Met een analoge methode kan ook een formule van Taylor in meer veranderlijken gevonden worden. We gaan daar niet op in.

Als $f(x, y)$ een functie van twee veranderlijken is, kunnen we de punten (x, y) beschouwen, waarvoor $f(x, y) = 0$. Nemen we b.v. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, dan vormen de punten (x, y) , waarvoor $f(x, y) = 0$, in het platte vlak juist de cirkel met straal 1 en middelpunt in $(0, 0)$. We kunnen nu uit $x^2 + y^2 - 1 = 0$ de y "oplossen", d.w.z. $y = \sqrt{1-x^2}$ (of $-\sqrt{1-x^2}$) schrijven. Door de betrekking $x^2 + y^2 - 1 = 0$, is y "impliciet" als functie van x bepaald. We zien echter, dat er een storende omstandigheid is in het feit, dat zowel $y = \sqrt{1-x^2}$ als $y = -\sqrt{1-x^2}$ oplossingen zijn, die aan elkaar sluiten bij $x = 1$ en $x = -1$. We lossen daarom impliciete functies alleen in de omgeving van een punt op.

We gebruiken de volgende hulpstelling.

(11.9) Als $f(x_1, \dots, x_n)$ continu is in $(a_1, \dots, a_n)$ en $f(a_1, \dots, a_n) > b$ (resp. $f(a_1, \dots, a_n) < b$), dan is er een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$, waar geldt $f(x_1, \dots, x_n) > b$ (resp. $f(x_1, \dots, x_n) < b$).

Dit wordt op dezelfde manier bewezen als voor functies van één veranderlijke.

(11.10) Als $f(y, x_1, \dots, x_n)$ een functie van $n+1$ veranderlijken is, gedefinieerd in een omgeving van $(b, a_1, \dots, a_n)$ en totaal differentieerbaar, als $f(b, a_1, \dots, a_n) = 0$ en als $\frac{\partial f(y, x_1, \dots, x_n)}{\partial y} \neq 0$, dan is er een totaal differentieerbare functie $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ gedefinieerd in een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$, zodat $f(\varphi(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = 0$, en dan is er een omgeving van $(b, a_1, \dots, a_n)$, zodat voor ieder punt $(y, x_1, \dots, x_n)$ in die omgeving, waarvoor geldt $f(y, x_1, \dots, x_n) = 0$, ook geldt $y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Bewijs: Omdat $f(y, x_1, \dots, x_n)$ totaal differentieerbaar is in

$(b, a_1, \dots, a_n)$, geldt $f(y, x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y} + \varepsilon(y, x_1, \dots, x_n) \right) (y - b) +$
 $+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} + \varepsilon_j(y, x_1, \dots, x_n) \right) (x_j - a_j)$, waarbij $\varepsilon(b, a_1, \dots, a_n) =$
 $= \varepsilon_j(b, a_1, \dots, a_n) = 0$ en $\varepsilon(y, x_1, \dots, x_n)$ en $\varepsilon_j(y, x_1, \dots, x_n)$ continu in $(b, a_1, \dots, a_n)$ voor $j = 1, \dots, n$. Omdat $\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y} \neq 0$ is er een $\delta_1 > 0$, zodat uit $|y - b| < \delta_1$ en $|x_j - a_j| < \delta_1$ ($j = 1, \dots, n$) volgt $|\varepsilon(y, x_1, \dots, x_n)| <$
 $< \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y} \right|$ (dus $\left| \frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y} + \varepsilon(y, x_1, \dots, x_n) \right| >$
 $> \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y} \right|$) en verder $|\varepsilon_j(y, x_1, \dots, x_n)| < 1$. Stel nu

$\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y} > 0$ (het geval dat het < 0 is, gaat analoog). Volgens (4.16) is er een $\delta_2 > 0$, zodat uit $b - \delta_2 < y < b$ volgt $f(y, a_1, \dots, a_n) < 0$ en uit $b < y < b + \delta_2$ volgt $f(y, a_1, \dots, a_n) > 0$. Noem $\lambda = \min(\delta_1, \frac{1}{2}\delta_2)$, dan is $f(b - \lambda, a_1, \dots, a_n) < 0$ en $f(b + \lambda, a_1, \dots, a_n) > 0$. Omdat $f(y, x_1, \dots, x_n)$ continu is, is er wegens (11.9) een $\delta_3 > 0$ te vinden zodat uit $|x_j - a_j| < \delta_3$ ($j = 1, \dots, n$) volgt $f(b - \lambda, x_1, \dots, x_n) < 0$ en $f(b + \lambda, x_1, \dots, x_n) > 0$. Noem $\mu = \min(\lambda, \delta_3)$ en beschouw een punt $(x_1, \dots, x_n)$ met $|x_j - a_j| < \mu$ ($j = 1, \dots, n$). Omdat $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, is $f(y, x_1, \dots, x_n)$ als functie van y streng monotoon; uit $f(b - \lambda, x_1, \dots, x_n) < 0$ en $f(b + \lambda, x_1, \dots, x_n) > 0$ volgt, dat er één en slechts één y is met $|y - b| < \lambda$ en $f(y, x_1, \dots, x_n) = 0$. Zo is y als functie $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ van $x_1, \dots, x_n$ gevonden. Verder geldt, wegens $|x_j - a_j| < \mu \leq \lambda < \delta_1$ ($j = 1, \dots, n$) en $|\varphi(x_1, \dots, x_n) - b| < \lambda < \delta_1$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) - b =$

$$= - \frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} + \varepsilon_j(\varphi(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) \right) (x_j - a_j)}{\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y} + \varepsilon(\varphi(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)}, \text{ dus}$$

$$|\varphi(x_1, \dots, x_n) - b| \leq \frac{\sum_{j=1}^n \left(\left| \frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} \right| + 1 \right) |x_j - a_j|}{\frac{1}{2} \left| \frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y} \right|}, \text{ waaruit volgt dat}$$

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$ continu is in $(a_1, \dots, a_n)$. Verder is $\varphi(x_1, \dots, x_n) - b =$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j}}{\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y}} (x_j - a_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j}}{\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y}} - \frac{\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j}}{\frac{\partial f(b, a_1, \dots, a_n)}{\partial y} + \varepsilon(\varphi(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)} + \varepsilon_j(\varphi(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) \right) (x_j - a_j),$$

waaruit volgt, dat $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ totaal differentieerbaar is in $(a_1, \dots, a_n)$. De totale differentieerbaarheid van $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in een ander punt wordt op dezelfde wijze aangetoond door dat punt de rol te laten vervullen, die hierboven $(a_1, \dots, a_n)$ gespeeld heeft.

Uit het bovenstaande bewijs blijkt tevens, dat $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$. Dit is,

nu we weten dat φ totaal differentieerbaar is, ook direct te vinden uit de betrekking $f(\varphi(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = 0$, door deze partieel naar x_j te differentiëren; dit levert n.l. $\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$.

We kunnen (11.10) nog uitbreiden tot een stelsel functies. Dit levert de volgende stelling:

(11.11) (Hoofdstelling over impliciete functies)

Als $f_1(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ functies van $n+m$ veranderlijken zijn, gedefinieerd in een omgeving van $(b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n)$ en totaal differentieerbaar, als de partiële afgeleiden van de eerste orde van deze functies continu zijn in $(b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n)$, als $f_k(b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n) = 0$ voor $k = 1, \dots, m$ en als de determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix},$$

waarin alle partiële afgeleiden genomen zijn in het punt $(b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n)$, ongelijk aan nul is, dan zijn er m totaal differentieerbare functies $\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$, gedefinieerd in een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$, zodat $f_k(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = 0$ voor $k = 1, \dots, m$, en dan is er een omgeving van $(b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n)$, zodat voor ieder punt $(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ in die omgeving, waarvoor geldt $f_k(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n) = 0$ ($k = 1, \dots, m$), ook geldt $y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n)$ ($k = 1, \dots, m$).

Het bewijs van deze stelling laten we achterwege.

We merken nog op dat de partiële afgeleiden $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$ gevonden kunnen

worden door de m betrekkingen $f_k(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = 0$ partieel naar x_j te differentiëren; dit levert m lineaire vergelijkingen,

waaruit de m onbekenden $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}$ kunnen worden opgelost.

De determinant uit stelling (11.11) noemt men een functionaaldeterminant, en schrijft men $\frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)}$.

Opgave 77. Als $x \log(\sin xy) = \operatorname{tg} e^{xy}$, bepaal dan $\frac{dy}{dx}$, als hierin y als functie van x beschouwd wordt.

We kunnen de hoofdstelling over impliciete functies ook toepassen op het omkeerprobleem voor functies van meer veranderlijken. Als m functies $f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)$ van m veranderlijken gegeven zijn, zij gevraagd hierbij een stelsel omkeersfuncties te zoeken, d.w.z. een stelsel

functies $g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_m(y_1, \dots, y_m)$, dusdanig dat $f_j(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_m(y_1, \dots, y_m)) = y_j$ en $g_j(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)) = x_j$ voor $j = 1, \dots, m$. Daartoe beschouwen we de vergelijkingen $f_j(x_1, \dots, x_m) - y_j = 0$ voor $j = 1, \dots, m$; laat verder $f_j(a_1, \dots, a_m) = b_j$ ($j = 1, \dots, m$) zijn. Als nu de partiële afgeleiden van de eerste orde van $f_j(x_1, \dots, x_m)$ ($j = 1, \dots, m$) in een omgeving van $(a_1, \dots, a_m)$ bestaan en continu zijn en als de functionaaldeterminant $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}$ in het punt $(a_1, \dots, a_m)$ ongelijk aan nul is, dan leert (11.11) ons, dat er m totaal differentieerbare functies $g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_m(y_1, \dots, y_m)$ bestaan, gedefinieerd in een omgeving van $(b_1, \dots, b_m)$, zodat $f_j(g_1(y_1, \dots, y_m), \dots, g_m(y_1, \dots, y_m)) - y_j = 0$ voor $j = 1, \dots, m$ en dat er een omgeving van $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m)$ bestaat, zodat voor ieder punt $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$ in die omgeving, waarvoor geldt $f_j(x_1, \dots, x_m) - y_j = 0$ ($j = 1, \dots, m$), ook geldt $x_j = g_j(y_1, \dots, y_m)$ ($j = 1, \dots, m$). Dit laatste is ook zo te formuleren, dat er een omgeving van $(a_1, \dots, a_m)$ bestaat, zodat voor ieder punt $(x_1, \dots, x_m)$ in die omgeving geldt $g_j(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)) = x_j$ ($j = 1, \dots, m$). Het omkeerprobleem is daarmee opgelost.

Opgave 78. Laat $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ zijn. Als hierdoor r en φ als functies van x en y gegeven zijn; bepaal dan $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Opgave 79. Laat $f(x, y)$ een functie zijn, waarvan de partiële afgeleiden van de tweede orde bestaan en continu zijn. Laat verder $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ zijn. Druk $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ uit in de partiële afgeleiden van de eerste orde en de tweede orde van $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ naar r en φ .

Opgave 80. Laat $f(x, y, z)$ een functie zijn, waarvan de partiële afgeleiden van de tweede orde bestaan en continu zijn. Laat verder $x = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = r \sin \vartheta$ zijn. Druk $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ uit in de partiële afgeleiden van de eerste en de tweede orde van $f(r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ naar r , φ en ϑ . (Aanwijzing: probeer van het resultaat van opgave 79 gebruik te maken).

Een functie $f(x_1, \dots, x_n)$ heeft een relatief maximum (resp. relatief minimum) in $(a_1, \dots, a_n)$, als er een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$ bestaat, zodat in die omgeving geldt $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(a_1, \dots, a_n)$ (resp. $f(x_1, \dots, x_n) \geq f(a_1, \dots, a_n)$). Uit de overeenkomstige stelling voor functies van één veranderlijke (4.17) volgt direct:

(11.12) Als $f(x_1, \dots, x_n)$ in $(a_1, \dots, a_n)$ totaal differentieerbaar is en daar een relatief maximum of een relatief minimum heeft, geldt daar $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ voor $j = 1, \dots, n$.

Evenals bij functies van één veranderlijke, kunnen we nadere bepalingen voor relatieve maxima en minima vinden, door afgeleiden van hogere dan de eerste orde in de beschouwingen te betrekken. We gaan daar niet op in.

Een belangrijk probleem bij de functies van meer veranderlijken vor-

men de maxima en minima met bijvoorwaarden. Laat b.v. gevraagd zijn het minimum van de functie $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ onder de bijvoorwaarde $g(x,y) = y^2 - 4x = 0$ (d.w.z. onder beperking tot punten (x,y) , die aan $y^2 - 4x = 0$ voldoen). Meetkundig stelt dit de vraag naar de kortste afstand van het punt $(1,0)$ tot de parabool $y^2 = 4x$ voor. Men zou dit kunnen oplossen door uit de bijvoorwaarde b.v. x op te lossen en deze in de functie te substitueren en zo een probleem zonder bijvoorwaarden te krijgen. Dit kan echter in het algemeen alleen als $\frac{\partial g}{\partial x} \neq 0$ is. Lost men zo in het voorbeeld y op, dan krijgt men na substitutie $(x-1)^2 + 4x = (x+1)^2$ en dit heeft een minimum bij $x = -1$; daar is echter geen y bij te vinden zodat aan de bijvoorwaarde voldaan is. Hadden we evenwel x opgelost, dan was er na substitutie $(\frac{1}{4}y^2 - 1)^2 + y^2 = (\frac{1}{4}y^2 + 1)^2$ gekomen en dit heeft een minimum bij $y = 0$, hetgeen het punt $(0,0)$ geeft, dat we in eerste aanleg niet gevonden hadden. Nu is in $(0,0)$ inderdaad $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

Met de methode der multiplicatoren van Lagrange kan de moeilijkheid, verschillende oplossingen te moeten proberen, omzeild worden.

(11.13) Als de functie $g(x_1, \dots, x_n)$ totaal differentieerbaar is in een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$, als minstens één der partiële afgeleiden

$\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$ ongelijk aan nul is in een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$, als $f(x_1, \dots, x_n)$ totaal differentieerbaar is in $(a_1, \dots, a_n)$ en als $f(x_1, \dots, x_n)$ in $(a_1, \dots, a_n)$, mits de punten $(x_1, \dots, x_n)$ beperkt worden tot de punten, die voldoen aan $g(x_1, \dots, x_n) = 0$, een relatief maximum of relatief minimum bezit, dan is er een reëel getal λ , zodat in $(a_1, \dots, a_n)$ geldt $\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0$ voor $j = 1, \dots, n$.

Bewijs: Laat de nummering der veranderlijken zo gekozen zijn, dat $\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$. Volgens (11.10) is er dan een functie $\varphi(x_2, \dots, x_n)$, zodat in een omgeving van $(a_1, \dots, a_n)$ de punten $(\varphi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ juist de punten zijn, die voldoen aan $g = 0$. Dan heeft de functie $f(\varphi(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$ een relatief minimum of relatief maximum in $(a_2, \dots, a_n)$, dus geldt daar $\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ voor $j = 2, \dots, n$. Verder geldt volgens de kettingregel: $\frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0$ voor $j = 2, \dots, n$.

$$\frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_1}$$

Noemen we nu $\lambda = - \frac{\frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_1}}$; voor $j = 2, \dots, n$ geldt dan

$$\lambda \frac{\partial g(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_1}}{\frac{\partial g(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_1}} \frac{\partial g(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} =$$

$$= - \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j}. \text{ Daarmee is } \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial g(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_j} = 0 \text{ voor}$$

$j = 1, \dots, n$ aangetoond.

Als men van een functie de relatieve maxima en minima onder een bijvoorwaarde wil vinden, kan men proberen uit de in (11.13) vermelde n betrekkingen en de bijvoorwaarde de n+1 onbekenden $x_1, \dots, x_n, \lambda$ op te lossen. Eventuele relatieve maxima en minima in punten, waar één der afgeleiden $\frac{\partial g}{\partial x_j} \neq 0$ is, zullen dan onder de gevonden oplossingen voorkomen.

Past men dit toe op het hierboven behandelde voorbeeld, dan vindt men $2(x-1) - 4\lambda = 0$, $2y + 2\lambda y = 0$, $y^2 - 4x = 0$. De enige oplossing hiervan is $\lambda = -\frac{1}{2}$, $x = y = 0$. Of dit werkelijk een relatief maximum of relatief minimum is, valt hieruit nog niet te concluderen.

Opgave 81. Welke punten uit de verzameling, die bepaald is door $x^4 + y^4 = 1$ hebben de kleinste en welke de grootste afstand tot $(0,0)$?

We moeten wel bedenken, dat punten waar $\frac{\partial g}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$ (z.g. singuliere punten van de bijvoorwaarde), niet onder onze beschouwingen vallen. Het kan zijn dat een relatief maximum of relatief minimum, dat in een dergelijk punt valt, met onze methode niet gevonden wordt. Hiervan een voorbeeld ter waarschuwing. Gevraagd het minimum van de functie $(x+1)^2 + y^2$ onder de bijvoorwaarde $x^3 - y^2 = 0$. Dit minimum is als volgt eenvoudig te vinden. Uit $x^3 = y^2$ volgt, dat $x \geq 0$ moet zijn. Dan is $x + 1 \geq 1$ en $(x+1)^2 + y^2 \geq 1$, maar $x = y = 0$ voldoet aan de bijvoorwaarde en geeft de functie de waarde 1. Dit is dus een minimum. Past men de methode van Lagrange toe, dan vindt men in het geheel geen oplossing. Inderdaad is $(0,0)$ een singulier punt van de bijvoorwaarde.

Opgave 82. Behandel het voorbeeld uit de vorige alinea met de methode van Lagrange.

§12. Oneigenlijke integralen.

Bij de definitie van bepaalde integralen hebben we ons beperkt tot begrensde functies, die gedefinieerd zijn op een begrensd interval. Van deze veronderstellingen proberen we ons nu te bevrijden. We beperken ons gemakshalve tot continue functies.

Laat $f(x)$ een continue functie zijn, gedefinieerd op $[a,b)$, die onbegrensd is (b.v. $\tan x$ op $[0, \frac{1}{2}\pi)$). Voor iedere β met $a < \beta < b$ geldt dan dat $f(x)$ op $[a, \beta]$ (wegens (3.13)) begrensd is, zodat (wegens (5.6))

$\int_a^\beta f(x)dx$ bestaat. Als nu $\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)dx$ bestaat, dan definiëren we de integraal van a tot b van $f(x)$ door $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)dx$. We noemen

deze een oneigenlijke integraal; de vroeger gedefinieerde integralen het eigenlijke integralen.

Als $f(x)$ continu en begrensd is op $[a,b)$, bestaat $\int_a^b f(x)dx$ als eigenlijke integraal; hiervoor geldt echter (zie blz. 41) $\int_a^b f(x)dx =$

$$= \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x) dx, \text{ zodat verwarring tussen eigenlijke en oneigenlijke in-}$$

tegralen niet te vrezen is. We behoeven verder bij de definitie van oneigenlijke integralen de onbegrensdheid van $f(x)$ niet te veronderstellen.

Als $f(x)$ een onbegrensde continue functie is, gedefinieerd op $(a, b]$,

$$\text{definiëren we op analoge wijze de oneigenlijke integraal } \int_a^b f(x) dx = \\ = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x) dx, \text{ zo deze limiet bestaat.}$$

Deze definities betreffen functies die bij hun eindpunt of hun beginpunt onbegrensd zijn. Op analoge wijze geven we de definitie voor functies die bij hun begin- en eindpunt en eventueel nog bij een eindig aantal tussengelegen punten onbegrensd zijn; d.w.z. er zijn getallen $\xi_0, \dots, \xi_m$ waarvoor geldt $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = b$ en een continue functie $f(x)$ gedefinieerd op (ξ_{j-1}, ξ_j) voor $j = 1, \dots, m$. Door verknipping van het integratie-interval komen we op de bovenstaande gevallen terug.

Als voorbeeld beschouwen we $\int_0^1 x^\lambda dx$. Voor $\lambda < 0$ is x^λ bij 0 onbegrensd. Voor $\alpha > 0$ geldt nu $\int_\alpha^1 x^\lambda dx = \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1}$ voor $\lambda \neq -1$ en $\int_\alpha^1 x^{-1} dx = -\log \alpha$. Dus $\int_0^1 x^\lambda dx$ bestaat niet voor $\lambda \leq -1$ en bestaat wel voor $\lambda > -1$. In het laatste geval is $\int_0^1 x^\lambda dx = \frac{1}{\lambda+1}$; dit levert alleen iets nieuws voor $-1 < \lambda < 0$.

(12.1) Als $f(x)$ een continue functie is, gedefinieerd op $[a, b)$ en als

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ bestaat, bestaat } \int_a^b f(x) dx.$$

Bewijs: $0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$. Verder volgt uit (5.5) en (10.2) direct, dat als de integrand ≥ 0 is, de integraal een isotone functie van

de bovengrens is. Dus als $a < \beta < b$, geldt $\int_a^\beta (|f(x)| - f(x)) dx \leq$
 $\leq 2 \int_a^\beta |f(x)| dx \leq 2 \int_a^b |f(x)| dx$. Dus is $\int_a^\beta (|f(x)| - f(x)) dx$ als functie van β isotoon en begrensd, dus $\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta (|f(x)| - f(x)) dx$ bestaat. Hieruit volgt, dat $\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta |f(x)| dx - \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta (|f(x)| - f(x)) dx =$
 $= \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x) dx$ bestaat.

Een analoge stelling geldt voor integralen die bij hun ondergrens on-eigenlijk worden.

Het omgekeerde van (12.1) geldt niet: het kan zijn dat $\int_a^b f(x)dx$ wel en $\int_a^b |f(x)| dx$ niet bestaat. Een voorbeeld hiervan is $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ op $(0, 1]$. Er geldt $\int \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \int x \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = x \cos \frac{1}{x} - \int \cos \frac{1}{x} dx$, dus voor $0 < \alpha < 1$ geldt $\int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \cos 1 - \alpha \cos \frac{1}{\alpha} - \int_{\alpha}^1 \cos \frac{1}{x} dx$. Nu geldt $\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha \cos \frac{1}{\alpha} = 0$ en $\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha}^1 \cos \frac{1}{x} dx$ bestaat, omdat de integrand be-grensd is en dus $\int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx$ als eigenlijke integraal bestaat. Dus bestaat $\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$. Voor een natuurlijk getal k en y in het interval

$(2k\pi + \frac{1}{4}\pi, 2k\pi + \frac{1}{2}\pi)$ geldt $\sin y \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dus

$$\int_{\frac{1}{2k\pi + \frac{1}{4}\pi}}^{\frac{1}{2k\pi + \frac{1}{2}\pi}} \frac{1}{x} |\sin \frac{1}{x}| dx \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \int_{\frac{1}{2k\pi + \frac{1}{4}\pi}}^{\frac{1}{2k\pi + \frac{1}{2}\pi}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \log(1 + \frac{1}{8k+1}) \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \log(1 + \frac{1}{9k}) \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}(\frac{1}{9k} - \frac{1}{2(9k)^2}) \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}(\frac{1}{9k} - \frac{1}{2(9k)}) \geq \frac{1}{18}\sqrt{2} \frac{1}{k} = \frac{c}{k},$$

waarin $c > 0$ en onafhankelijk van k . Omdat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k}$ divergent is,

is er bij iedere $R > 0$ een $\alpha > 0$ te vinden zodat $\int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} |\sin \frac{1}{x}| dx > R$ is,

dus $\int_0^1 \frac{1}{x} |\sin \frac{1}{x}| dx$ bestaat niet.

(12.2) Als $f(x)$ en $g(x)$ continue functies zijn, gedefinieerd op $[a, b]$, als er een constante C bestaat, zodat $|f(x)| \leq Cg(x)$ voor alle x in $[a, b]$

en als $\int_a^b g(x)dx$ bestaat, bestaat $\int_a^b f(x)dx$.

Bewijs: Uit $|f(x)| \leq Cg(x)$ volgt, dat $g(x) \geq 0$, dus $\int_a^{\beta} g(x)dx$ is een isotone functie van β . Voor $a < \beta < b$ geldt dan $\int_a^{\beta} |f(x)| dx \leq C \int_a^{\beta} g(x) dx \leq C \int_a^b g(x) dx$. Dus is $\int_a^{\beta} |f(x)| dx$ als functie van β iso-toon en begrensd, dus $\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^{\beta} |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx$ bestaat. Uit (12.1) volgt nu, dat ook $\int_a^b f(x)dx$ bestaat.

Opgave 83. Bewijs dat $\int_0^1 \frac{dx}{x+3\sqrt{x}}$ en $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sin x}$ bestaan.

We gaan nu over tot de definitie van integralen over onbegrensde integratie-intervallen. Laat $f(x)$ een continue functie zijn, gedefinieerd op $[a, +\infty)$, dan definiëren we $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx$, mits de limiet in het rechterlid bestaat. Op analoge wijze definiëren we voor een continue functie $f(x)$, gedefinieerd op $(-\infty, a]$, $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^a f(x) dx$, mits de limiet in het rechterlid bestaat. Ten slotte definiëren we voor een continue functie $f(x)$, gedefinieerd op $(-\infty, +\infty)$, $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$, mits beide integralen in het rechterlid bestaan. Het is niet moeilijk aan te tonen, dat deze laatste niet afhangt van de keuze van a . Ook de hier gedefinieerde integralen heten oneigenlijk.

Let wel, dat men niet neemt $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$, want het rechterlid kan bestaan, zonder dat het linkerlid bestaat. B.v. $\int_{-R}^R \frac{x dx}{x^2+1} = (\log \sqrt{x^2+1}) \Big|_{x=R} - (\log \sqrt{x^2+1}) \Big|_{x=-R} = 0$, maar $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{x^2+1}$ bestaat niet.

We kunnen deze typen integralen op de vroeger behandelde typen terugbrengen. Volgens (5.29) geldt n.l. (als $a > 0$) $\int_a^R f(x) dx = \int_{\frac{1}{R}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$. Als nu $R \rightarrow +\infty$, dan $\frac{1}{R} \downarrow 0$ en omgekeerd. Het bestaan of niet bestaan van $\int_a^\infty f(x) dx$ komt overeen met het bestaan of niet bestaan van $\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ en in geval van bestaan is $\int_a^\infty f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$. Op analoge wijze kunnen we $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ behandelen.

Om b.v. het bestaan van $\int_0^\infty x^\lambda dx$ te onderzoeken, nemen we in plaats daarvan $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^\lambda} dx = \int_0^1 x^{-\lambda-2} dx$. We weten, dat deze bestaat voor

$-\lambda - 2 > -1$, dus voor $\lambda < -1$ en niet bestaat voor $-\lambda - 2 \leq -1$, dus voor

$\lambda \geq -1$. Evenzo kunnen we $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ behandelen door $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ te beschouwen. Dus $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ bestaat, maar $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ niet. We weten verder dat $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ bestaat, omdat de integrand begrensd is. Dus ook $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ bestaat.

Met de bovenvermelde transformatie kunnen we ook de stellingen (12.1) en (12.2) overbrengen. Dit levert het volgende resultaat.

(12.3) Als $f(x)$ een continue functie is, gedefinieerd op $[a, +\infty)$ en

$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ bestaat, dan bestaat $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

(12.4) Als $f(x)$ en $g(x)$ continue functies zijn, gedefinieerd op $[a, +\infty)$, als er een constante C bestaat, zodat $|f(x)| \leq Cg(x)$ voor alle x in

$[a, +\infty)$ en als $\int_a^{\infty} g(x) dx$ bestaat, dan bestaat $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Analoge stellingen gelden voor $\int_{-\infty}^a$ en voor $\int_{-\infty}^{\infty}$.

Als $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ bestaat, zeggen we dat $\int_a^{\infty} f(x) dx$ absoluut convergeert.

Als $|f(x)| \leq Cg(x)$, zeggen we dat $\int_a^{\infty} g(x) dx$ een majorant is van $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Deze uitdrukkingen zijn analoog met gebruikelijke uitdrukkingen in de theorie van de oneindige reeksen. De overeenkomstige uitdrukkingen worden ook gebruikt bij oneigenlijke integralen met begrensd integratie-interval (dus de gevallen van (12.1) en (12.2)).

Opgave 84. Bewijs dat $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ en $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2}$ bestaan, maar dat

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x}$ niet bestaat.

Dat $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx$ bestaat, betekent volgens het convergentie criterium van Cauchy (2.3) hetzelfde als, dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een ω te vinden is zodat voor $R_1 > \omega$ en $R_2 > \omega$ geldt

$\left| \int_a^{R_2} f(x) dx - \int_a^{R_1} f(x) dx \right| < \varepsilon$,

dus $\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$. Dus:

(12.5) Als $f(x)$ een continue functie is, gedefinieerd op $[a, +\infty)$, dan bestaat $\int_a^\infty f(x)dx$ dan en slechts dan, als bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\omega > a$ te vinden is, zodat voor alle R_1 en R_2 met $R_1 > \omega$ en $R_2 > \omega$ geldt

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Speciaal is dan $\left| \int_{R_1}^\infty f(x)dx \right| \leq \varepsilon$, dus $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^\infty f(x)dx = 0$.

(12.6) Als $\int_a^\infty f(x)dx$ bestaat, geldt $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^\infty f(x)dx = 0$.

Met behulp van oneigenlijke integralen kunnen we een nieuw convergentiecriteria voor reeksen geven. We bewijzen daartoe eerst de volgende hulpstelling:

(12.7) Als $f(x)$ een antitone continue functie is, gedefinieerd op $[1, +\infty)$ als $f(x) \geq 0$ voor alle x in $[1, +\infty)$ en als $f(n) = a_n$ en $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$ gesteld wordt voor natuurlijke n , dan bestaat $I = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - \int_1^n f(x)dx)$ en $0 \leq I \leq a_1$.

Bewijs: Uit het feit dat $f(x)$ antitoon is volgt $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x)dx$ (het tweede lid uiteraard slechts voor $k \geq 2$). Hieruit volgt direct, dat $\int_1^n f(x)dx + a_n \leq A_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$, dus $0 \leq a_n \leq A_n +$

$-\int_1^n f(x)dx \leq a_1$. Verder vormen de $A_n - \int_1^n f(x)dx$ een antitone rij, want $A_{n-1} - \int_1^{n-1} f(x)dx - (A_n - \int_1^n f(x)dx) = \int_{n-1}^n f(x)dx - a_n \geq 0$. De beweringen van de stelling volgen hieruit direct.

Uit (12.7) volgt nu onmiddellijk:

(12.8) (Integraalcriterium voor reeksen) Als $f(x)$ een antitone continue functie is, gedefinieerd op $[1, +\infty)$, als $f(x) \geq 0$ voor alle x in $[1, +\infty)$ en als $f(n) = a_n$ gesteld wordt voor natuurlijke n , dan bestaan $\sum_{n=1}^\infty a_n$ en $\int_1^\infty f(x)dx$ beide of geen van beide.

Hiermee is b.v. direct in te zien, dat $\sum n^\alpha$ convergeert voor $\alpha < -1$ en divergeert voor $\alpha \geq -1$ en dat $\sum \frac{1}{n \log n}$ divergeert.

Opgave 85. Onderzoek de convergentie van $\sum \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ en $\sum \frac{1}{n^\alpha (n+1)^{\alpha^2}}$.

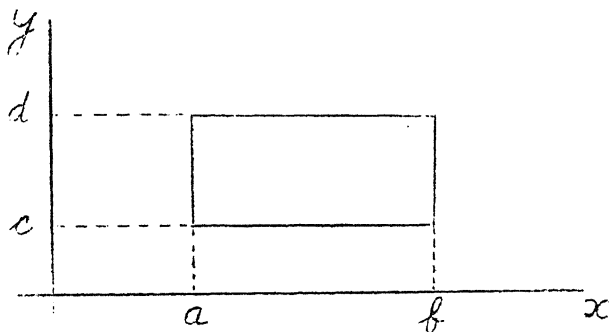
Opgave 86. Bewijs dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ bestaat en ≥ 0 is.

De limiet uit opgave 86 heet de constante van Euler. Van deze constante is niet bekend of zij rationaal of irrationaal is.

§13. Meervoudige integralen.

We behandelen nu het begrip integraal voor functies van meer dan één veranderlijke. We zullen ons daarbij voor de eenvoud beperken tot functies van twee veranderlijken, hoewel een analoge behandeling voor functies van meer veranderlijken mogelijk is. Wij zullen ter illustratie van de begrippen gebruik maken van de voorstelling van getallenparen door punten van het platte vlak.

Bij de definitie van het begrip (eigenlijke) integraal gingen we bij functies van één veranderlijke uit van een begrensde functie gedefinieerd op een begrensd interval. We beschouwen nu ook begrensde functies van twee veranderlijken; een functie $f(x,y)$ heet begrensd als er een getal $C > 0$ bestaat, zodat $|f(x,y)| \leq C$ geldt voor ieder punt (x,y) in de definitieverzameling van $f(x,y)$. We moeten nu echter ook een voorwaarde opleggen aan de definitieverzameling van $f(x,y)$. De meest directe generalisatie van



het begrip begrensd interval zou zijn, dat zowel x als y een begrensd interval doorloopt, d.w.z. we beschouwen de verzameling van die punten (x,y) , waarvoor geldt $a < x < b$, $c < y < d$. Meetkundig stelt deze verzameling het inwendige van een rechthoek evenwijdig met de coördinaatassen voor. Met een zo

speciale definitieverzameling kunnen we ons echter niet tevreden stellen. We zullen algemenere verzamelingen als definitieverzamelingen moeten toelaten.

Een verzameling S van punten (x,y) heet open, als ieder punt van S een omgeving heeft, die geheel tot S behoort, d.w.z. als bij ieder punt (a,b) in S een getal $\lambda > 0$ bestaat, zodat uit $|x-a| < \lambda$ en $|y-b| < \lambda$ volgt, dat (x,y) in S ligt. Een open verzameling heet ook wel een gebied.

Het voordeel van open verzamelingen blijkt uit de volgende eigenschap.

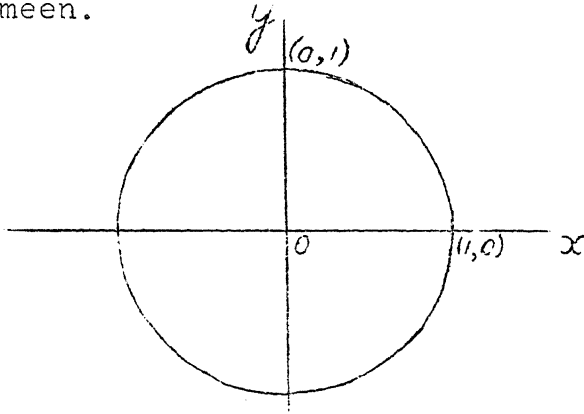
Als een continue functie gedefinieerd is in een open verzameling en deze functie wordt uitgebreid tot een grotere verzameling, dan blijft de functie in de oude verzameling continu. Precieser uitgedrukt:

(13.1) Als $f(x,y)$ een continue functie is, gedefinieerd in een gebied G en $g(x,y)$ is een functie, gedefinieerd in een verzameling S , die G omvat,

dusdanig dat voor alle (x,y) in G geldt $g(x,y) = f(x,y)$, dan is $g(x,y)$ in de punten van G continu.

Opgave 87. Bewijs (13.1)

Als S een verzameling van punten (x,y) is, noemen we de rand van S de verzameling R bestaande uit die punten, waarvoor geldt, dat in iedere omgeving van zo'n punt zowel punten liggen, die wel tot S behoren als punten die niet tot S behoren. Als S een gebied is, hebben R en S geen punten gemeen.



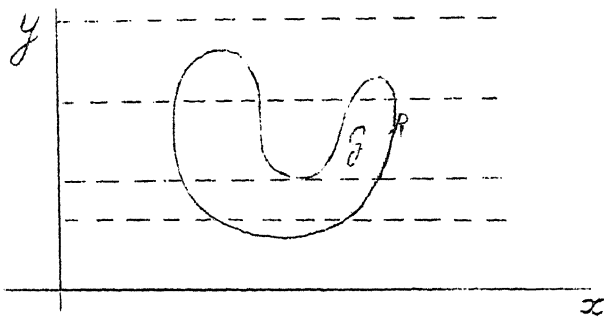
Een voorbeeld van een gebied is de verzameling der punten (x,y) , waarvoor geldt $x^2 + y^2 < 1$ (inwendige van de cirkel met middelpunt O en straal 1). De rand van dit gebied is de cirkel zelf ($x^2 + y^2 = 1$).

Een verzameling S van punten (x,y) heet begrensd als er een getal $K > 0$

bestaat zodat voor ieder punt (x,y) in S geldt $|x| \leq K$ en $|y| \leq K$. Meetkundig betekent dit dat S in een vierkant in te sluiten is.

De volgende twee voorwaarden voor een begrensd gebied G met rand R noemen we samen de voorwaarde A_x :

- 1^o voor ieder getal c geldt hetzij dat er geen getallen x zijn, zodat (x,c) in G ligt, hetzij dat de verzameling der getallen x waarvoor (x,c) in G ligt uit een eindig aantal begrensde open intervallen bestaat;
- 2^o voor ieder getal c geldt hetzij dat er geen getallen x zijn, zodat (x,c) in R ligt, hetzij dat de verzameling der getallen x waarvoor (x,c) in R ligt uit een eindig aantal punten bestaat; voor een eindig aantal getallen c behoeft deze voorwaarde niet vervuld te zijn.

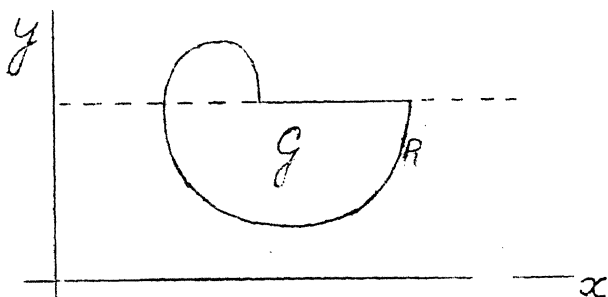


eindig aantal punten snijdt. Dat op

Meetkundig betekent de voorwaarde A_x , dat iedere rechte evenwijdig met de x -as het gebied G hetzij in het geheel niet snijdt hetzij volgens eindig veel lijnstukken snijdt, verder dat een dergelijke rechte de rand R hetzij in het geheel niet snijdt, hetzij volgens een

Geheel aanloog met de voorwaarde A_x wordt een voorwaarde A_y gedefinieerd door x en y van rol te laten verwisselen; meetkundig heeft deze voorwaarde

dus betrekking op rechte lijnen evenwijdig met de Y -as.

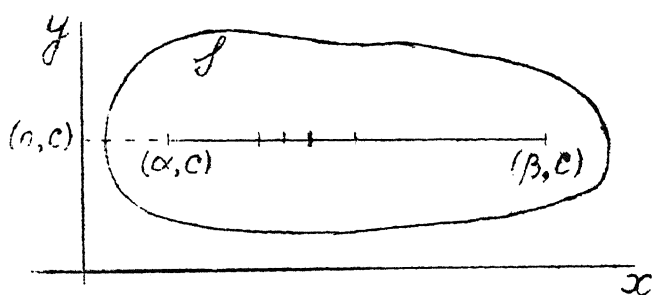


We zullen gebieden, die aan de voorwaarden Ax en/of Ay voldoen nu gebruiken om integralen te definiëren. We behandelen eerst echter enige voorbereidende hulpstellingen.

We hebben vroeger bewezen (5.6), dat een begrensde continue functie (van één veranderlijke) die gedefinieerd is op een begrensd open interval, integreerbaar is. Deze stelling blijft juist als er een eindig aantal argumentwaarden is, waarvoor de functie niet continu is; dit is eenvoudig na te gaan.

(13.2) Als $f(x,y)$ een functie is, gedefinieerd in een verzameling S en als c, α en β getallen zijn, dusdanig dat voor alle x met $\alpha \leq x \leq \beta$ geldt, dat het punt (x,c) in S ligt en dat de functie in dat punt continu is, dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodat uit $|y-c| < \delta$ volgt, dat $|f(x,y) - f(x,c)| < \varepsilon$ voor alle x in $[\alpha, \beta]$, waarvoor geldt dat (x,y) in S ligt.

Bewijs: Veronderstel dat de stelling onjuist is, d.w.z. dat er een $\varepsilon_1 > 0$ bestaat, zodat voor iedere $\delta > 0$ een x in $[\alpha, \beta]$ en een y met $|y-c| < \delta$ is, zodat (x,y) in S ligt en $|f(x,y) - f(x,c)| \geq \varepsilon_1$ is. Verdeel $[\alpha, \beta]$ in twee gelijke intervallen $[\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)]$ en $[\frac{1}{2}(\alpha + \beta), \beta]$, dan geldt voor minstens een van beide intervallen bovenstaande bewering over ε_1 (met $[\alpha, \beta]$ vervangen door dat interval). Noem zo'n interval $[\alpha_1, \beta_1]$. Verdeel dit interval weer in twee gelijke intervallen en noem een interval waarvoor bovenstaande bewering geldt

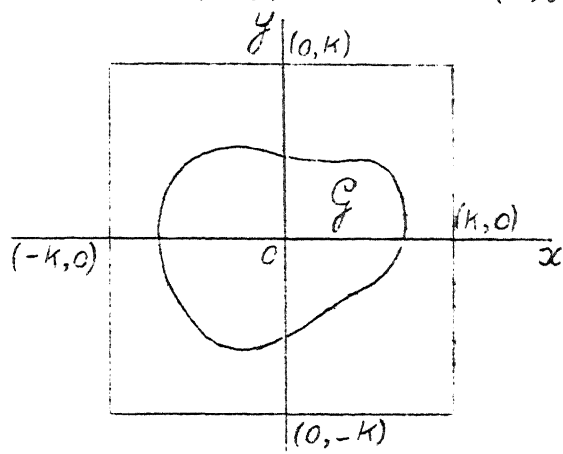


$[\alpha_2, \beta_2]$ enz. Zo krijgen we een rij intervallen $[\alpha_n, \beta_n]$, die inkrimpen tot een getal ξ , zodat geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \xi$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \xi$ (zie voor

een analoog procédé het bewijs van (3.13)). Daar ξ in $[\alpha, \beta]$ ligt is de functie f in het punt (ξ, c) continu, dus is er een $\delta_1 > 0$ zodat uit $|x - \xi| < \delta_1$, $|y - c| < \delta_1$ en (x,y) in S volgt $|f(x,y) - f(\xi, c)| < \frac{1}{2} \varepsilon_1$. Verder is er een n zodat voor iedere x in $[\alpha_n, \beta_n]$ geldt $|x - \xi| < \delta_1$. Er is dan een dergelijke x en een y met $|y - c| < \delta_1$ zodat (x,y) in S ligt en $|f(x,y) - f(x,c)| \geq \varepsilon_1$ is. Er geldt dan $\varepsilon_1 \leq |f(x,y) - f(x,c)| \leq |f(x,y) - f(\xi, c)| + |f(\xi, c) - f(x,c)| < \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 = \varepsilon_1$, hetgeen een tegenstrijdigheid is. Daarmee is de stelling bewezen.

Stel nu dat $f(x,y)$ een begrensde continue functie is, gedefinieerd in een begrensd gebied G , dat aan de voorwaarde Ax voldoet. Voor ieder getal c , dusdanig dat de rechte $y = c$ iets met G gemeen heeft, geldt dan dat de functie van één veranderlijke $f(x,c)$ op een stelsel van eindig veel begrensde intervallen gedefinieerd en continu is, dus integreerbaar is in elk dezer intervallen. Noemen wij de som der integralen over deze intervallen $F(c)$ en stellen we $F(c) = 0$ als de rechte $y = c$ niets met G gemeen heeft, dan bewijzen we dat $F(y)$ een continue functie van y is, behalve eventueel in die argumentwaarden waar 2° van voorwaarde Ax niet vervuld is.

Om dit te bewijzen voeren we een nieuwe functie $g(x,y)$ in. Omdat G begrensd is, is er een getal $K > 0$ zodat voor alle punten (x,y) in G geldt $|x| < K$ en $|y| < K$. De functie $g(x,y)$ is nu gedefinieerd in het gebied H bestaande uit alle punten (x,y) met $|x| < K$ en $|y| < K$ (vierkant), en wel is $g(x,y) = f(x,y)$ voor alle (x,y) in G en $g(x,y) = 0$ voor alle (x,y) , die wel in H , maar niet in G liggen. Nu



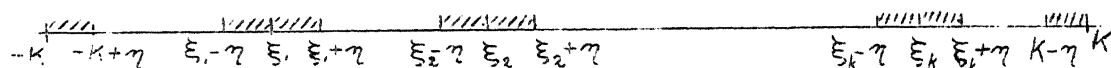
is $g(x,y)$ continu in alle punten van G , maar ook in alle punten van H die niet in G en niet in de rand R van G liggen, want bij een dergelijk punt is een omgeving te vinden, die geen punten van G bevat en waarbinnen de functie g dus identiek nul is. Voor een getal ε , dat geen uitzonderingsgetal van 2^0 van voorwaarde Ax is,

geldt dus dat $g(x,c)$ continu is voor $-K < x < K$ behalve eventueel in een eindig aantal argumentwaarden, corresponderende met de snijpunten van $y=c$ met R . Laat dit de getallen $\xi_1, \dots, \xi_k$ zijn. Omdat $f(x,y)$ begrensd is, is er een getal $L > 0$ zodat $|f(x,y)| \leq L$ voor alle (x,y) in G ; dan geldt ook $|g(x,y)| \leq L$ voor alle (x,y) in H . Als $\varepsilon > 0$, noem dan

$$\eta = \min\left(\frac{\varepsilon}{8(k+2)L}, \frac{1}{4}(\xi_1 + K), \frac{1}{4}(\xi_2 - \xi_1), \dots, \frac{1}{4}(\xi_k - \xi_{k-1}), \frac{1}{4}(K - \xi_k)\right).$$

Op elk der $(k+1)$ intervallen $[-K + \eta, \xi_1 - \eta]$, $[\xi_1 + \eta, \xi_2 - \eta]$, $\dots$

$\dots$, $[\xi_{k-1} + \eta, \xi_k - \eta]$, $[\xi_k + \eta, K - \eta]$ is $g(x,c)$ voor x in zo'n interval con-



tinu. Volgens (13.2) bestaat er bij elk interval een $\delta_j > 0$ zodat uit $|y-c| < \delta_j$ en x in dat interval volgt $|g(x,y) - g(x,c)| < \frac{\varepsilon}{4K}$.

We splitsen nu de integraal $\int_{-K}^K (g(x,y) - g(x,c)) dx$ in een aantal stukken.

Voor de $(k+2)$ stukken behorende bij $(-K, -K + \eta)$, $(\xi_1 - \eta, \xi_1 + \eta)$, $\dots$

$\dots$, $(\xi_k - \eta, \xi_k + \eta)$, $(K - \eta, K)$ geldt $\left| \int (g(x,y) - g(x,c)) dx \right| \leq$

$$\leq \int |g(x,y)| dx + \int |g(x,c)| dx \leq 4\eta L \leq \frac{\varepsilon}{2(k+2)}; \text{ voor deze stukken samen}$$

dus $\leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Voor de andere stukken samen geldt, als $|y-c| < \min(\delta_1, \dots, \delta_{k+1})$,

dat $\left| \int (g(x,y) - g(x,c)) dx \right| < \frac{\varepsilon}{4K} 2K = \frac{1}{2}\varepsilon$. Dus als $|y-c| < \delta$, geldt

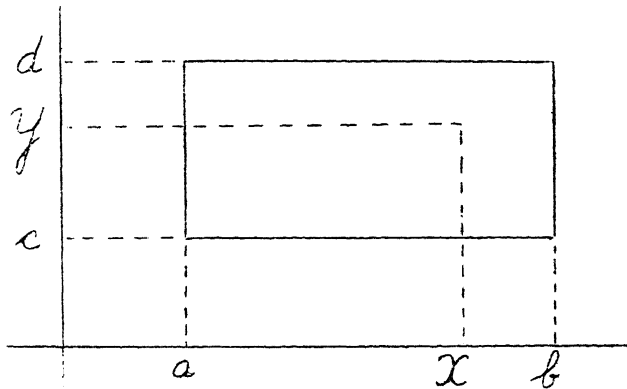
$$\left| \int_{-K}^K (g(x,y) - g(x,c)) dx \right| < \varepsilon, \text{ dus de functie } G(y) = \int_{-K}^K g(x,y) dx \text{ is con-}$$

tinu in c . Het is echter duidelijk dat $G(y) = F(y)$. Omdat $F(y)$ continu is, eventueel met uitzondering van een eindig aantal argumentwaarden, bestaat

$\int_{-K}^K F(y)dy$. We noemen dit resultaat de herhaalde integraal $\iint f(x,y)dx dy$,

uitgestrekt over het gebied G . Het is duidelijk dat de keuze van K in het resultaat geen rol speelt, daar de functie g buiten G toch gelijk aan nul gekozen wordt.

Als G ook aan voorwaarde A_y voldoet kunnen we ook de herhaalde integraal $\iint f(x,y)dy dx$, uitgestrekt over G , bepalen. We gaan nu na in hoeverre de beide herhaalde integralen aan elkaar gelijk zijn. We beschouwen daartoe eerst het eenvoudige geval, dat $f(x,y)$ gedefinieerd en continu



is in het inwendige en de rand van een rechthoek: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Nemen we een punt (X,Y) in deze verzameling dan zijn de herhaalde integralen

$$\int_c^Y \int_a^X f(x,y)dx dy \text{ en } \int_a^X \int_c^Y f(x,y)dy dx$$

gedefinieerd. We noemen ter afkorting

$$\int_c^Y f(x,y)dy = F(x,Y); \text{ er geldt dan}$$

$\frac{\partial F(x,Y)}{\partial Y} = f(x,Y)$. Uit (13.2) volgt nu, dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodat uit $|y-Y| < \delta$, $a \leq x \leq b$ en $c \leq y \leq d$ volgt dat $|f(x,y) - f(x,Y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Als nu $0 < |h| < \delta$ is en $c \leq Y+h \leq d$, dan geldt

$$\frac{1}{h} \left(\int_a^b F(x,Y+h)dx - \int_a^b F(x,Y)dx \right) = \int_a^b \frac{F(x,Y+h) - F(x,Y)}{h} dx =$$

$$= \int_a^b f(x,Y+\vartheta h)dx \text{ met } 0 < \vartheta < 1 \text{ (}\vartheta \text{ kan van } x \text{ afhangen) en verder}$$

$$|Y+\vartheta h - Y| = \vartheta |h| < \delta, \text{ dus } |f(x,Y+\vartheta h) - f(x,Y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ dus}$$

$$\left| \int_a^b f(x,Y+\vartheta h)dx - \int_a^b f(x,Y)dx \right| < \varepsilon. \text{ Hieruit volgt } \frac{\partial}{\partial Y} \int_a^b F(x,Y)dx =$$

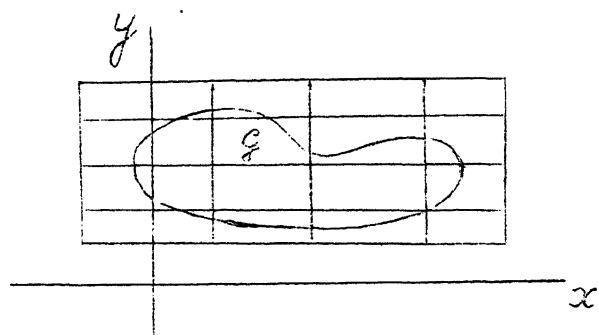
$$= \int_a^b f(x,Y)dx. \text{ Aangezien } F(x,c) = 0 \text{ en dus } \int_a^b F(x,c)dx = 0, \text{ geldt}$$

$$\int_a^b F(x,Y)dx = \int_c^Y \int_a^b f(x,y)dx dy \text{ en hieruit volgt } \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy dx =$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx dy.$$

Om van dit speciale geval tot het algemene geval te komen, beschou-

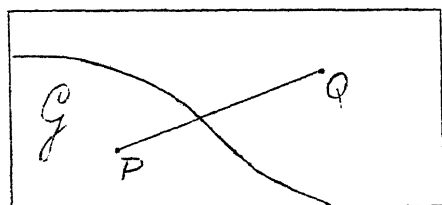
wen we eerst het volgende. Als het gebied G waarover de herhaalde integraal uitgestrekt wordt, ingesloten is in een rechthoek met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen, verdelen we deze rechthoek in een aantal



kleinere rechthoeken door rechte lijnen evenwijdig met de coördinaatassen. Vervolgens voeren we de integratie uit over het gedeelte van G dat binnen één van deze rechthoeken ligt. Doen we dit voor elke dergelijke rechthoek, dan is de som van de aldus verkregen integralen gelijk

aan de integraal over het gehele gebied. Dit volgt direct uit stelling (5.5) over de verdeling van een interval bij gewone (enkelvoudige) integralen.

Als een rechthoek bepaald wordt door $p \leq x \leq q$ en $r \leq y \leq s$ dan heet $(q-p)(s-r)$ de oppervlakte van de rechthoek. Als $|f(x,y)| \leq L$ en $f(x,y)$ wordt geïntegreerd over een gebied binnen zo'n rechthoek dan is de herhaalde integraal $\leq L (q-p)(s-r)$. Dit volgt direct uit (5.3).



Als in een rechthoek een punt P ligt dat tot G behoort en een punt Q dat niet tot G behoort, dan ligt er een punt in, dat tot de rand van G behoort en wel is een dergelijk punt te vinden op het lijnstuk dat P en Q

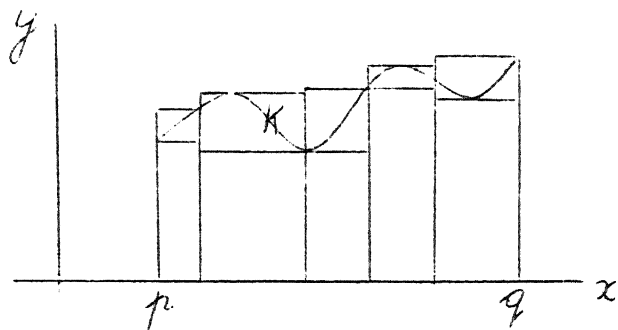
verbindt. Als $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, dan beschouwen we de punten $X(\lambda) = (p_1 + \lambda(q_1 - p_1), p_2 + \lambda(q_2 - p_2))$ met $0 \leq \lambda \leq 1$ (deze punten liggen alle binnen de rechthoek) en nemen de bovenste grens μ van die waarden λ , waarvoor $X(\lambda)$ tot G behoort. Omdat G open is, behoort $X(\mu)$ niet tot G ; uit de definitie van μ volgt dat er in iedere omgeving van $X(\mu)$ punten liggen, die wel tot G behoren. Dus is $X(\mu)$ een randpunt van G .

Voor de rechthoeken van de verdeling, die, met inbegrip van hun rand, geheel binnen G liggen hebben we hierboven bewezen dat de beide herhaalde integralen gelijk zijn; voor de rechthoeken die geen punten van G bevatten, zijn beide herhaalde integralen nul en dus ook aan elkaar gelijk. Er blijven dan nog rechthoeken over die punten binnen G en punten buiten G bevatten, en dus punten van de rand R van G bevatten.

We leggen nu aan de rand van G een nieuwe voorwaarde op.

We zeggen dat een begrensd gebied G met rand R aan de voorwaarde B voldoet als het volgende geldt: Er zijn eindig veel verzamelingen ("krommen" K bestaande uit de punten (x,y) waarvoor geldt $y = \varphi(x)$, waarin φ een continue functie is en x een begrensd interval doorloopt, of bestaande uit de punten (x,y) , waarvoor geldt $x = \psi(y)$, waarin ψ een continue functie is en y een begrensd interval doorloopt, dusdanig dat ieder punt van R in minstens één der verzamelingen K ligt.

We zeggen dat een begreënsd gebied G met rand R aan de voorwaarde C voldoet, als het aan de voorwaarden A_x , A_y en B voldoet. We veronderstellen nu dat dit voor het gebied G het geval is. Laat k het aantal krommen in voorwaarde B zijn en ε een getal > 0 . Stel verder $|f(x,y)| < L$. Beschouw een van de krommen K , bepaald door $y = \varphi(x)$, waarbij x het interval (p,q) doorloopt. Omdat $\varphi(x)$ continu is, is $\varphi(x)$ integreerbaar; volgens (5.2) en de overeenkomstige stelling over benedensommen is er een $\delta > 0$ te vinden, zodat voor een verdeling van het interval (p,q) met diameter $< \delta$ het verschil van de boven- en benedensom kleiner is dan $\frac{\varepsilon}{4kL}$.



Dit betekent (zie figuur), dat K ingesloten wordt in een eindig aantal rechthoekjes, waarvan de som van de oppervlakken gelijk is aan $\frac{\varepsilon}{2kL}$. Maken we de verticale zijden van de rechthoekjes nog twee maal zo groot, dan kunnen we zelfs bereiken dat de randen van de rechthoekjes niets met K gemeen hebben; de totale som wordt dan $\frac{\varepsilon}{2kL}$. Op analoge wijze gaan we te werk als x een functie van y is. Doen we dit nu voor alle krommen en gebruiken we alle zo verkregen horizontale en verticale lijnen voor een verdeling van een G omvattende rechthoek in kleinere rechthoeken, dan is de som van de oppervlakken van de rechthoeken die iets met de rand van G gemeen hebben $\leq k \frac{\varepsilon}{2kL} = \frac{\varepsilon}{2L}$. De som van de herhaalde integralen over deze rechthoeken is $\leq \frac{\varepsilon}{2L} L = \frac{\varepsilon}{2}$. Dit geldt voor beide soorten herhaalde integralen. In alle andere rechthoeken zijn beide soorten herhaalde integralen gelijk. De beide soorten herhaalde integralen over het gehele gebied G verschillen dus minder dan ε . Daar dit voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt, zijn ze aan elkaar gelijk.

Als G een begreënsd gebied is, dat aan voorwaarde C voldoet, heet de integraal over G van de functie, die constant $= 1$ is, de oppervlakte van G .

Als voorbeeld zij gevraagd de oppervlakte te bepalen van het inwendige van de cirkel $x^2 + y^2 = R^2$. Dit geeft

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} dx dy = \int_{-R}^{+R} 2\sqrt{R^2-y^2} dy = \\ & = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 2R^2 (\cos \varphi)^2 d\varphi = \pi R^2; \text{ hierin is } y = R \sin \varphi \text{ gesteld, verder is} \\ & \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}(\sin \varphi \cos \varphi + \varphi). \end{aligned}$$

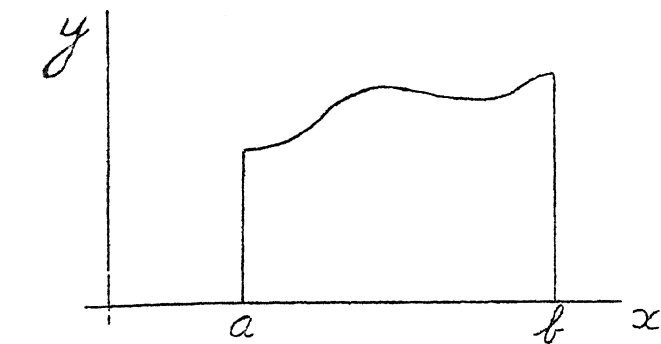
Opgave 88. Bereken de integraal van x^2 over het inwendige van de cirkel $x^2 + y^2 = R^2$.

Opgave 89. Als $a < c$ en $f(x,y)$ continu is, bewijs dan dat $\int_a^b \int_a^y f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_x^b f(x,y) dy dx$. Hoe ziet het integratiegebied er uit?

Als $f(x)$ een continue functie is, gedefinieerd in het interval (a,b) en $f(x) \geq 0$ voor alle x in (a,b) dan

beschouwen we het gebied G begrensd door de x -as, de rechte lijnen $x=a$ en $x=b$ en de grafiek van de functie. De herhaalde integraal $\iint dydx$ uitgestrekt over dit gebied is dan juist

gelijk aan $\int_a^b f(x)dx$. Deze integraal



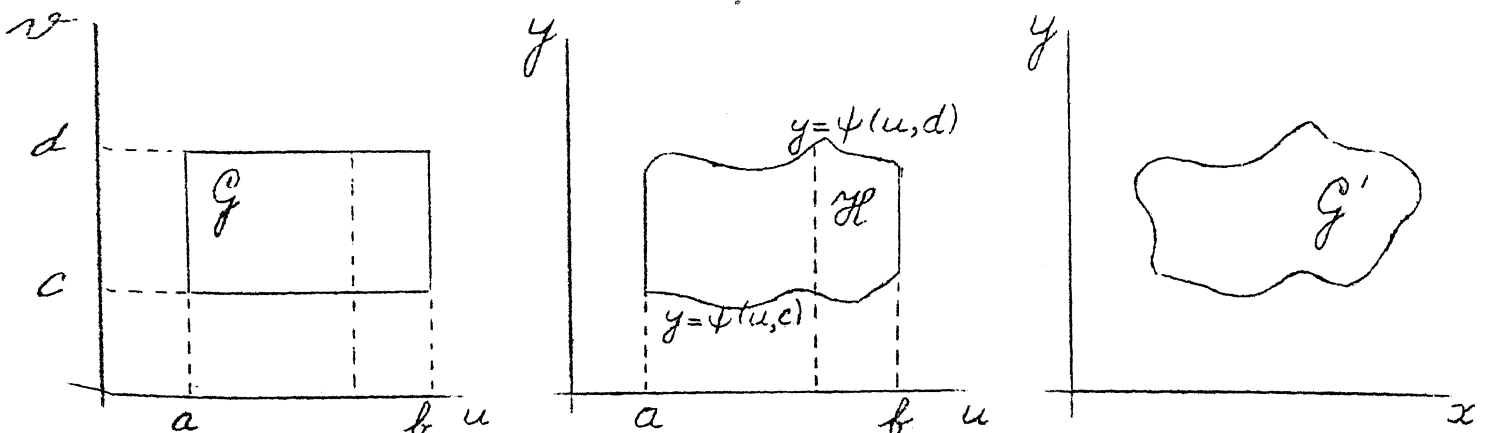
is daarom op te vatten als de oppervlakte van dat gebied. Dit is in overeenstemming met de opmerking die we op blz. 38 bij de definitie van het begrip integraal gemaakt hebben.

Een integratiegebied G wordt dikwijls als volgt gegeven. Laat $\varphi(x,y)$ een continue functie zijn, gedefinieerd voor alle punten (x,y) van het platte vlak. Dan is de verzameling G der punten (x,y) , waarvoor $\varphi(x,y) > 0$, een open verzameling; voor de punten van de rand van G geldt $\varphi(x,y)=0$. Een voorbeeld hiervan is het reeds eerder beschouwde cirkelgebied; de bijbehorende functie is $1-x^2-y^2$.

Een belangrijk hulpmiddel om herhaalde integralen uit te rekenen is transformatie van veranderlijken. Laat $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ zijn, waarin φ en ψ partieel differentieerbaar zijn met continue partiële afgeleiden van de eerste orde; laat verder de functionaaldeterminant

$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$ zijn. Laat verder de hierdoor gegeven transformatie van punten (u,v) in punten (x,y) eeneenduidig zijn, d.w.z. laat uit $\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2)$ en $\psi(u_1, v_1) = \psi(u_2, v_2)$ volgen dat $u_1 = u_2$ en $v_1 = v_2$. Laat verder met een gebied G in het u - v -vlak, dat aan voorwaarde C voldoet, een gebied G' in het x - y -vlak corresponderen, dat ook aan voorwaarde C voldoet. Laat ten slotte $f(x,y)$ een continue functie zijn, gedefinieerd op G' , dan geldt $\iint_{G'} f(x,y) dx dy = \iint_G f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du dv$.

We bewijzen deze stelling alleen voor het geval dat G een rechthoek is met zijden evenwijdig met de coördinaatassen, dat φ en ψ binnen de rechthoek en op de rand van de rechthoek gedefinieerd zijn en dat $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$



Omdat $\frac{\partial \psi}{\partial v} \neq 0$, is er een functie $\chi(u, y)$, zodat $\psi(u, \chi(u, y)) = y$ en $\chi(u, \psi(u, v)) = v$. Verder is $\frac{\partial \chi}{\partial u} = -\frac{\partial \psi}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^{-1}$. We splitsen de transformatie in twee transformaties: $u = u$, $y = \psi(u, v)$ en $x = \varphi(u, \chi(u, y))$, $y = y$. De eerste transformatie geeft, voor constante u , y als monotone functie van v ; y doorloopt dus een interval gelegen tussen $\psi(u, c)$ en $\psi(u, d)$. Er komt dus een gebied H ingesloten door $u=a$, $u=b$, $y = \psi(u, c)$ en $y = \psi(u, d)$. Dit gebied voldoet dus aan de voorwaarde A_y . Beschouwen we de tweede transformatie en houden we y constant, dan is x een functie van u en de afgeleide van x naar u is $\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \chi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^{-1} \neq 0$, dus x is een monotone continue functie van u . Verder wordt in het x - y -vlak het gebied G' door lijnen evenwijdig met de x -as volgens eindig veel intervallen gesneden; hetzelfde geldt dus ook in het u - y -vlak voor het gebied H . Op analoge wijze ziet men in dat de voorwaarde voor de rand ook voor H geldt; H voldoet aan de voorwaarde A_u . Dat H aan voorwaarde B voldoet is duidelijk; H voldoet dus aan voorwaarde C . Nu geldt:

$$\begin{aligned} \iint_{G'} f(x, y) dx dy &= \iint_H f(\varphi(u, \chi(u, y)), y) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \psi}{\partial v} \right|^{-1} du dy = \\ &= \iint_H f(\varphi(u, \chi(u, y)), y) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \psi}{\partial v} \right|^{-1} dy du = \\ &= \int_G \int f(\varphi(u, \chi(u, \psi(u, v))), \psi(u, v)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \psi}{\partial v} \right|^{-1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial v} \right| dv du = \\ &= \int_G \int f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| du dv, \end{aligned}$$

waarmee de te bewijzen betrekking aangetoond is.

Kiezen we bijvoorbeeld $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ als transformatieformules dan is $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$. Met het inwendige van de cirkel $x^2 + y^2 = R^2$ correspondeert dan $0 \leq r < R$ en $0 \leq \varphi < 2\pi$. De oppervlakte van de cirkel wordt

$$\iint dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\varphi = \pi R^2. \text{ Aan dit voorbeeld zien we het voordeel, dat we ook in het algemene geval dikwijls uit transformatie van veranderlijken proberen te behalen: het integratiegebied wordt eenvoudiger en de integraal daardoor gemakkelijker uit te rekenen.}$$

Opgave 90. Bereken de oppervlakte van het binnengebied van de ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ (Aanwijzing: gebruik de transformatie } x = a r \cos \varphi, y = b r \sin \varphi.)$$

Zonder bewijs delen wij mede, dat de integraaltheorie, zoals die hierboven voor functies van twee veranderlijken is afgeleid, op analoge wijze voor functies van drie en meer veranderlijken kan worden behandeld. In het bijzonder geldt ook een analoge transformatiestelling, waarin ook nu weer de functionaaldeterminant optreedt. Bij drie veranderlijken treedt nu de inhoud in plaats van de oppervlakte.

Opgave 91. Bereken de inhoud van het inwendige van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. (Aanwijzing: pas de transformatie $x = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = r \sin \vartheta$ toe.)

Opgave 92. Bereken de oppervlakte van het gebied waarvoor geldt $(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(x^2 - y^2) < 0$ en $x > 0$.

Opgave 93. Behandel opgave 88 opnieuw, nu met transformatie van veranderlijken.

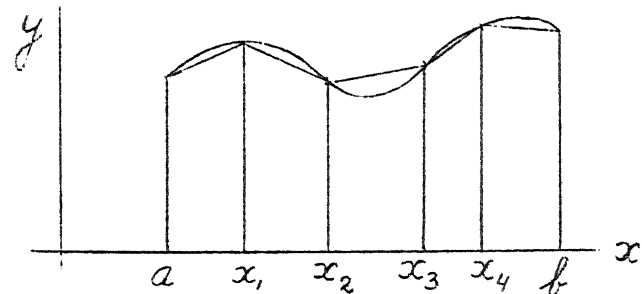
Opgave 94. Bewijs dat de transformatie $x = c\sqrt{(1+u)(1-v)}$, $y = c\sqrt{uv}$ met $c > 0$ een eeneenduidige transformatie tot stand brengt tussen de punten (u, v) die voldoen aan $u > 0$, $0 < v < 1$ en de punten (x, y) die voldoen aan $x > 0$, $y > 0$. Bereken met behulp van deze transformatie de integraal $\iint \sqrt{(x^2 + y^2 - c^2)^2 + 4c^2 y^2} dx dy$, uitgestrekt over het inwendige van de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, waarbij geldt $a^2 - b^2 = c^2$ en $b \neq 0$.

Opgave 95. Bereken $\int_0^b \int_0^a x e^{xy} dx dy$.

We passen de verkregen integraaltheorie toe ter bepaling van de booglengte van krommen en van de oppervlakte van kromme oppervlakken.

Laat $f(x)$ een begrensde continu differentieerbare functie zijn, gedefinieerd op een interval (a, b) ; de grafiek van deze functie noemen we een vlakke kromme. We maken nu een verdeling $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ van het interval (a, b) . De afstand van de punten $(x_i, f(x_i))$ en $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ is dan volgens de stelling van Pythagoras gelijk aan

$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$. Tellen we deze afstanden op dan krijgen we de som van de lengten van een stel in de grafiek beschreven koorden; dit wordt $\sum_{i=1}^k \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$.



Volgens de middelwaardestelling van de differentiaalrekening is er nu een ξ_i met $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ zodat $f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f'(\xi_i)$; de som wordt dus $\sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}$. Verfijnt men nu de verdeling en laat men de diameter tot nul naderen, dan nadert deze som blijkbaar tot

$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, hetgeen de booglengte van de kromme genoemd wordt. Men

schrijft wel $y = f(x)$ en vindt dan $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$.

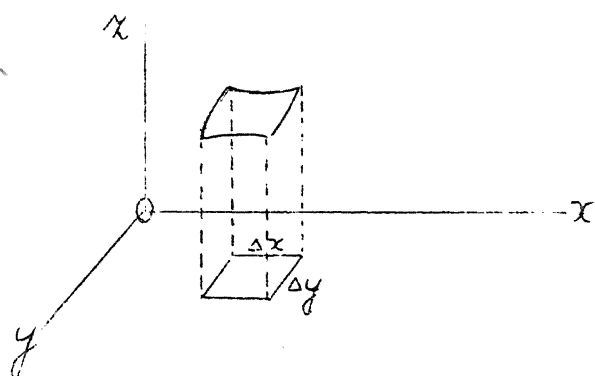
Neemt men b.v. de halve cirkel $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ($-R < x < R$), dan is $y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ en $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$; de booglengte wordt $\int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx =$
 $= R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_{-R}^R = \pi R$.

Opgave 96. Bereken de booglengte van het gedeelte van de parabool $y = x^2$ gelegen tussen $x = 0$ en $x = \frac{2}{3}$.

Als een kromme gegeven is door $x = f(t)$, $y = g(t)$, waarin f en g continu differentieerbare functies zijn en $f' \neq 0$, dan kunnen we de omkeersfunctie $h(x)$ van $f(t)$ bepalen; er geldt dan $\frac{dh}{dx} = \left(\frac{df}{dt}\right)^{-1}$. De kromme is dan bepaald door $y = g(h(x))$ en $y' = \frac{dg}{dt} \frac{dh}{dx} = \frac{dg}{dt} \left(\frac{df}{dt}\right)^{-1}$. Nu is $\int \sqrt{1 + y'^2} dx =$
 $= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 \left(\frac{df}{dt}\right)^{-2}} \frac{df}{dt} dt = \int \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2} dt$. Laat b.v. een cirkel gegeven zijn door $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ dan is de booglengte van een gedeelte van de cirkel tussen t_0 en t_1 gelijk aan $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt =$
 $= R(t_1 - t_0)$.

Op analoge wijze kan men ook booglengte definiëren van krommen, die in de ruimte gelegen zijn. We gaan daar niet op in.

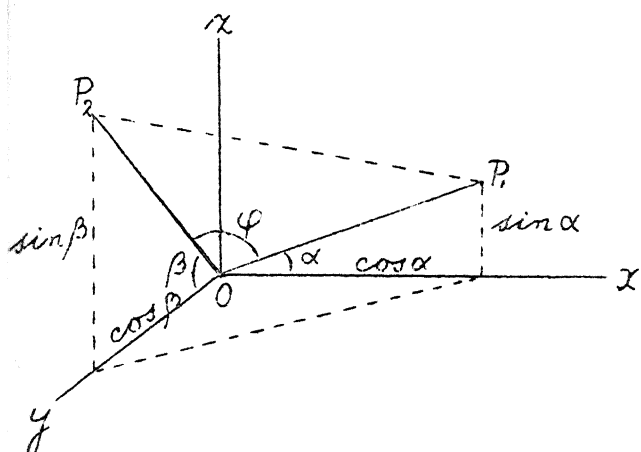
Als $f(x, y)$ een totaal differentieerbare functie is met continue partiële afgeleiden van de eerste orde, gedefinieerd in een gebied G , dat aan de voorwaarde C voldoet, dan noemen we de verzameling der punten (x, y, z) in de ruimte, waarvoor geldt $z = f(x, y)$ een oppervlak in de ruimte. We nemen



een rechthoekje met zijden evenwijdig met de assen in het OXY-vlak en een punt (ξ, η) daarbinnen. We benaderen het oppervlak door $z = f(\xi, \eta) +$
 $+ \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} (x - \xi) + \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y} (y - \eta)$;
 dat is een stukje plat vlak (raakvlak).

Noem ter afkorting $\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} = p =$

$= \tan \alpha$ en $\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y} = q = \tan \beta$. Er komt nu een parallelogram. Laat het rechthoekje zijden Δx en Δy hebben, dan zijn de zijden van het parallelogram blijkbaar $\frac{\Delta x}{\cos \alpha}$ en $\frac{\Delta y}{\cos \beta}$; immers de hoek die zo'n zijde met de overeenkomstige zijde van de rechthoek maakt is α resp. β . We moeten nu nog de hoek φ tussen twee zijden van het parallelogram hebben. Daarvoor geldt $\cos \varphi = \sin \alpha \sin \beta$. Dit is met behulp van enige stereometrie als volgt in te zien (zie figuur). Zet OP_1 en OP_2 ter lengte 1 af. Dan is $P_1 P_2^2 =$
 $= OP_1^2 + OP_2^2 - 2 OP_1 \cdot OP_2 \cos \varphi = 2(1 - \cos \varphi)$; verder is $P_1 P_2^2 =$
 $= (\sin \beta - \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 = 2(1 - 2 \sin \alpha \sin \beta)$.



Hieruit volgt $\cos \varphi = \sin \alpha \sin \beta$.
 De oppervlakte van het parallelogram
 is dus $\frac{\Delta x}{\cos \alpha} \frac{\Delta y}{\cos \beta} \sqrt{1 - (\sin \alpha \sin \beta)^2} =$
 $= \Delta x \Delta y \sqrt{1 + (\tan \alpha)^2 + (\tan \beta)^2} =$
 $= \Delta x \Delta y \sqrt{1 + p^2 + q^2}$. Dit tellen we nu
 op over een verdeling van het OXY-
 vlak in rechthoekjes. Bij verfijning

van de verdeling nadert het blijkbaar tot $\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$, het-
 geen we de oppervlakte van het oppervlak noemen.

Nemen we b.v. de halve bol $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, dan is $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ en
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ en de oppervlakte dus $\iint \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy =$
 $= R \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R^2$.

Einde van de cursus.

§ 14. Reeksen (vervolg).

Een reeks heet voorwaardelijk convergent als hij convergent, maar niet absoluut convergent is. Een voorbeeld is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, die convergent is met log 2 als som, maar niet absoluut convergent, want $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent. De tot nu toe behandelde convergentiekenmerken leveren steeds absolute convergentie en zijn dus op voorwaardelijk convergente reeksen niet van toepassing. Een der hulpmiddelen om convergentie van voorwaardelijk convergente reeksen aan te tonen is partiële sommatie.

(14.1) (Partiële sommatie). Als a_n en b_n rijen zijn en $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, dan geldt $\sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N$.

Bewijs: Voor $n > 1$ geldt $a_n = A_n - A_{n-1}$; verder is $a_1 = A_1$. Dus $\sum_{n=1}^N a_n b_n = A_1 b_1 + \sum_{n=2}^N (A_n - A_{n-1}) b_n = A_1 b_1 + \sum_{n=2}^N A_n b_n - \sum_{n=1}^{N-1} A_n b_{n+1} = \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_N$.

Als nu de rij A_n begrensd is en als de rij b_n antitoon en begrensd is, dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$ absoluut convergent, want $|A_n| \leq C$, $b_n \geq b$, $b_n - b_{n+1} \geq 0$, dus $\sum_{k=1}^n |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq C \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = C(b_1 - b_{n+1}) \leq C(b_1 - b)$, waaruit de convergentie volgt (zie opgave 97).

Opgave 97. Als $a_n \geq 0$ en als $\sum_{k=1}^n a_k$ begrensd is, dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent. Bewijs dit.

Om te bewerkstelligen, dat $A_N b_N$ convergeert, moeten we er nog wat bij eisen, b.v. dat A_N convergeert (dat b_N convergeert, volgt al uit de vroegere eisen), of dat A_N begrensd is en b_N naar nul convergeert. Dit geeft de volgende criteria:

(14.2) (Convergentie criterium van Abel). Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert en b_n is antitoon en begrensd, dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(14.3) (Convergentie criterium van Dirichlet). Als $\sum_{k=1}^n a_k$ begrensd is en b_n is antitoon en convergent met limiet nul, dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ heet alternerend, als voor iedere n geldt:

als $c_n > 0$, dan $c_{n+1} < 0$ en als $c_n < 0$, dan $c_{n+1} > 0$. De termen zijn dus afwisselend positief en negatief. We kunnen dan, al naar gelang $c_1 < 0$ of $c_1 > 0$, is, schrijven $c_n = (-1)^n |c_n|$ of $c_n = (-1)^{n+1} |c_n|$. We behandelen verder het eerste van deze twee gevallen; het tweede gaat analoog.

Kiezen we nu $a_n = (-1)^n$ en $b_n = |c_n|$, dan is $A_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(-1)^{n-1}}{2}$ (ga dat zelf na), dus $-1 \leq A_n \leq 0$, dus A_n is begrensd. Als dus $|c_n|$ antitoon is en naar nul convergeert, levert het criterium van Dirichlet ons, dat

$\sum_n c_n$ convergent is. Noem dan $\sum_{k=1}^n c_k = C_n$ en $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = C$. Als $c_n > 0$, dan geldt voor ieder natuurlijk getal k , dat $C_{n+2k} = C_n + \sum_{j=1}^{2k} c_{n+j} =$
 $= C_n + \sum_{j=1}^k (c_{n+2j-1} + c_{n+2j}) = C_n + \sum_{j=1}^k (-|c_{n+2j-1}| + |c_{n+2j}|) \leq C_n$.

Hieruit volgt $C \leq C_n$. Als $c_n < 0$, dan geldt voor ieder natuurlijk getal k , dat $C_{n+2k} = C_n + \sum_{j=1}^k (c_{n+2j-1} + c_{n+2j}) = C_n + \sum_{j=1}^k (|c_{n+2j-1}| - |c_{n+2j}|) \geq C_n$, dus $C \geq C_n$. Dit levert ons de volgende stelling:

(14.4) (Convergentiecriterium van Leibniz). Als $\sum_n c_n$ alternerend is,

en als $|c_n|$ antitoon en convergent met limiet nul is, dan is $\sum_n c_n$ convergent. Bovendien geldt, dat, als C_n de partiële sommen en C de som van $\sum_n c_n$ voorstellen, dat uit $c_n > 0$ volgt $C_n \geq C$ en uit $c_n < 0$ volgt $C_n \leq C$.

De partiële sommen zijn dus beurtelings groter en kleiner dan de som.

Met (14.4) kan opnieuw de convergentie van $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ aangetoond worden.

Oefening 98. Voor welke waarden van x zijn de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ convergent?

Een reeks $\sum_n b_n$ heet een verschuiving van de reeks $\sum_n a_n$, als er een eeneenduidige afbeelding $\varphi(n)$ van de verzameling der natuurlijke getallen op zichzelf bestaat, zodat $b_n = a_{\varphi(n)}$. Dit betekent dus, dat de reeks $\sum_n b_n$ dezelfde termen bevat als $\sum_n a_n$, maar eventueel in een andere volgorde. Het is duidelijk dat dan $\sum_n a_n$ ook een verschuiving is van $\sum_n b_n$ ($a_n = b_{\varphi(n)}$ met $\varphi(\varphi(n)) = n$ en $\varphi(\varphi(n)) = n$).

(14.5) Als $\sum_n a_n$ absoluut convergent is en als $\sum_n b_n$ een verschuiving is van $\sum_n a_n$, dan is $\sum_n b_n$ ook absoluut convergent en de som van $\sum_n b_n$ is dezelfde als de som van $\sum_n a_n$.

Bewijs: Bij $\varepsilon > 0$ is, wegens de absolute convergentie van $\sum_n a_n$, een N_1 te vinden, zodat voor $n > N_1$ geldt $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \frac{1}{2} \varepsilon$. Als A de som van $\sum_n a_n$ is, is er een N_2 te vinden, zodat voor $n > N_2$ geldt $|A - \sum_{k=1}^n a_k| < \frac{1}{2} \varepsilon$. Laat nu $b_n = a_{\varphi(n)}$ en $a_n = b_{\psi(n)}$ zijn. Noem $N = \max(N_1, N_2) + 1$ en M het grootste der getallen $\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(N)$. Onder de getallen $b_1, \dots, b_M$ komen dan de getallen $a_1, \dots, a_N$ voor. Voor $n > M$ geldt dan

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k - \sum_{m=1}^N a_m \right| \leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \varphi(k) > N}} |b_k| = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \varphi(k) > N}} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Voor $n > M$ geldt dus $|A - \sum_{k=1}^n b_k| < \varepsilon$, dus $\sum_n b_n$ is convergent met som A .

Om te bewijzen dat $\sum_n b_n$ zelfs absoluut convergent is, bedenken we, dat $\sum_n |b_n|$ ook een verschikking van $\sum_n |a_n|$ is; passen we hierop het reeds bewezen gedeelte van de stelling toe, dan vinden we dat $\sum_n |b_n|$ convergeert, dus dat $\sum_n b_n$ absoluut convergeert.

Voor voorwaardelijk convergente reeksen geldt (14.5) niet; zelfs geldt daarvoor de volgende stelling:

(14.6) (Stelling van Riemann). Bij een voorwaardelijk convergente reeks $\sum_n a_n$ is een verschikking te vinden, die divergeert en is bij ieder reëel getal σ een verschikking te vinden, die convergeert met som σ .

Bewijs: We beperken ons gemakshalve bij het bewijs tot het geval, dat $a_n \neq 0$ voor alle n . Stel $b_n = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|)$ en $c_n = \frac{1}{2}(a_n - |a_n|)$, dan is $a_n = b_n + c_n$, $b_n \geq 0$ en $c_n \leq 0$. Verder geldt voor $a_n > 0$, dat $b_n = a_n$ en $c_n = 0$ en voor $a_n < 0$, dat $b_n = 0$ en $c_n = a_n$. De termen $\neq 0$ van de reeksen $\sum_n b_n$ en $\sum_n c_n$ zijn juist de positieve, resp. negatieve termen van $\sum_n a_n$, elk éénmaal geteld. Omdat $\sum_n a_n$ convergent is en $\sum_n |a_n|$ divergent is, zijn $\sum_n b_n$ en $\sum_n c_n$ beide divergent. Omdat $\sum_n b_n$ divergent is en $b_n \geq 0$ is er bij iedere C en iedere natuurlijke n een natuurlijk getal m te vinden zodat $\sum_{k=n}^m b_k > C$, want als dat niet zo was zouden de partiële sommen van $\sum_n b_n$ begrensd zijn en dus $\sum_n b_n$ convergent (zie opgave 37). Op analoge wijze zien we in, dat er bij iedere C en iedere natuurlijke n een natuurlijk getal M te vinden is zodat $\sum_{k=n}^M c_k < C$. Laat nu σ een willekeurig reëel getal zijn. Bepaal eerst m_1 als het kleinste natuurlijke getal, zodat $\sum_{k=1}^{m_1} b_k > \sigma$, vervolgens M_1 als het kleinste natuurlijke getal zodat $\sum_{k=1}^{M_1} c_k < \sigma - \sum_{k=1}^{m_1} b_k$, vervolgens m_2 als het kleinste natuurlijke getal zodat $\sum_{k=m_1+1}^{m_2} b_k > \sigma - \sum_{k=1}^{m_1} b_k - \sum_{k=1}^{M_1} c_k$, vervolgens M_2 als het kleinste natuurlijke getal zodat $\sum_{k=M_1+1}^{M_2} c_k < \sigma - \sum_{k=1}^{m_1} b_k - \sum_{k=1}^{M_1} c_k - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} b_k$, enz. Laat $d_1, \dots, d_{h_1}$ de elementen $\neq 0$ uit $b_1, \dots, b_{m_1}$ zijn; $d_{h_1+1}, \dots, d_{H_1}$ de elementen $\neq 0$ uit $c_1, \dots, c_{M_1}$; $d_{H_1+1}, \dots, d_{h_2}$ de elementen $\neq 0$ uit $b_{m_1+1}, \dots, b_{m_2}$; $d_{h_2+1}, \dots, d_{H_2}$ de elementen $\neq 0$ uit $c_{M_1+1}, \dots, c_{M_2}$ enz. Het is duidelijk, dat de reeks $\sum_n d_n$ een verschikking is van de reeks $\sum_n a_n$. Omdat $\sum_n a_n$ convergent is, geldt

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; bij $\varepsilon > 0$ is en dus een N te vinden zodat voor $n > N$ geldt $|a_n| < \varepsilon$, maar dan ook $|b_n| < \varepsilon$ en $|c_n| < \varepsilon$, immers $|b_n| \leq |a_n|$ en $|c_n| \leq |a_n|$. Kies nu een k zodat $m_k > N$ en $M_k > N$. Als nu $m > H_k$ is, dan is er hetzij een $r \geq k$ zodat $H_r \leq m \leq h_{r+1}-1$, hetzij een $r \geq k$ zodat $h_r \leq m \leq H_r-1$. In het eerste van deze twee gevallen is $\sum_{j=1}^m d_j \leq \sum_{j=1}^{h_{r+1}-1} d_j = \sum_{j=1}^{m_{r+1}-1} b_j + \sum_{j=1}^{M_r} c_j \leq \sigma$ en $\sum_{j=1}^m d_j \geq \sum_{j=1}^{H_r} d_j = \sum_{j=1}^{m_r} b_j + \sum_{j=1}^{M_r} c_j = \sum_{j=1}^{m_r} b_j + \sum_{j=1}^{M_r-1} c_j + c_{M_r} > \sigma - \varepsilon$. In het tweede geval bewijst men op analoge wijze dat $\sigma \leq \sum_{j=1}^m d_j < \sigma + \varepsilon$. In beide gevallen is dus $|\sigma - \sum_{j=1}^m d_j| < \varepsilon$. Dus $\sum_{j=1}^{\infty} d_j = \sigma$. Door een analoge redenering kan een verschikking van de reeks $\sum_n a_n$ gevonden worden die divergeert.

Het in het bovenstaande bewijs gebruikte verschikkingsprocédé kan als volgt in woorden geformuleerd worden. We nemen eerst zoveel positieve termen van de reeks, dat we met de partiële som net boven σ uitkomen, vervolgens zoveel negatieve termen, dat we met de partiële som van alle reeds gekozen termen net onder σ uitkomen, vervolgens weer zoveel positieve termen, dat we met de partiële som van alle reeds gekozen termen net boven σ uitkomen, enz.

Opgave 99. Bewijs dat de reeks $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \dots$ convergeert met $\frac{1}{2} \log 2$ als som.

We gaan uit van twee reeksen $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ met partiële sommen A_n en B_n , gerekend van de index 0 af. Dan is $A_n B_n = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j b_k$. Dit bestaat dus uit alle producten $a_j b_k$ met $j \leq n$ en $k \leq n$. We willen nu een reeks vormen met deze grootheden als termen: hierbij zullen we echter een afspraak moeten maken over de volgorde, waarin we ze zullen nemen. Deze afspraak ontleenen we aan een analogie met machtreeksen. Neem de machtreeksen $\sum_n a_n x^n$ en $\sum_n b_n x^n$, dan is $\sum_{j=0}^n a_j x^j \sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j b_k x^{j+k} = \sum_{j=0}^n \sum_{m=j}^{n+j} a_j b_{m-j} x^m = \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j} x^m + \sum_{m=n+1}^{2n} \sum_{j=m-n}^m a_j b_{m-j} x^m$. Noemen we nu $c_m = \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j}$, dan is c_m de coëfficiënt van x^m in het product van de partiële sommen van de twee machtreeksen, althans als $n \geq m$. We noemen nu $\sum_n c_n$ de productreeks van de reeksen $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$. Als $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ convergeren, behoeft hun productreeks niet te convergeren. Hiervan geven we een voorbeeld.

Neem $a_0=b_0=a_1=b_1=0$, $a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\log n}$ voor $n \geq 2$, dan zijn $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ convergent (Leibniz). Verder is $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} = \sum_{j=2}^{n-2} a_j b_{n-j} =$
 $= \sum_{j=2}^{n-2} \frac{(-1)^j}{\log j} \cdot \frac{(-1)^{n-j}}{\log(n-j)} = (-1)^n \sum_{j=2}^{n-2} \frac{1}{\log j \log(n-j)}.$

Opgave 100. Bewijs dat voor $a > 1$ en $1 \leq x \leq 2a-1$ geldt $(\log a)^2 \geq \log x \log(2a-x).$

Omdat $\log j \log(n-j) \leq (\log \frac{1}{2}n)^2$, is $|c_n| \geq \frac{n-3}{(\log \frac{1}{2}n)^2}$ en dit $\rightarrow +\infty$ als $n \rightarrow \infty$. Dus $\sum_n c_n$ is divergent.

De gekozen volgorde van de sommatie wordt echter toch gerechtvaardigd door het feit dat, als de productreeks convergeert, de som het product is van de sommen der oorspronkelijke reeksen en dat de productreeks absoluut convergeert als beide oorspronkelijke reeksen absoluut convergeren. Deze beide stellingen zullen we nu bewijzen. Daartoe bewijzen we eerst een hulpstelling.

(14.7) Als de rij a_n convergeert en $b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$, dan convergeert de rij b_n en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Bewijs: We beschouwen eerst het geval dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Bij $\epsilon > 0$ is een N_1 te vinden, zodat voor $n > N_1$ geldt $|a_n| < \frac{1}{2}\epsilon$. Verder is er een N_2 te vinden, zodat voor $n > N_2$ geldt $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} |a_k| < \frac{1}{2}\epsilon$. Voor $n > \max(N_1, N_2)$ geldt dan $|b_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a_k| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N_1} |a_k| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1+1}^n |a_k| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{n-N_1}{n+1} \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$. Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ en $b_n - a = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (a_k - a)$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a) = 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Opgave 101. Toon aan dat het omgekeerde van (14.7) niet geldt met behulp van de rij $a_n = (-1)^n$.

(14.8) Als de productreeks van twee convergente reeksen convergent is, is de som van de productreeks het product van de sommen van de twee oorspronkelijke reeksen.

Bewijs: Laat de gegeven reeksen $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ zijn met partiële sommen resp. A_n en B_n en sommen resp. A en B . Voor de productreeks $\sum_n c_n$ geldt $C_n = \sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^{n-j} b_k = \sum_{j=0}^n a_j B_{n-j}$. Dan is $\sum_{n=0}^N C_n = \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n a_j B_{n-j} = \sum_{j=0}^N \sum_{n=j}^N a_j B_{n-j} = \sum_{j=0}^N B_j \sum_{n=0}^{N-j} a_n = \sum_{j=0}^N B_j A_{N-j} =$

$= A \sum_{j=0}^N B_j + \sum_{j=0}^N B_j (A_{N-j} - A)$. Omdat de rij B_n convergent is, is deze rij begrensd: $|B_n| \leq K$ voor alle n . Dus $\left| \sum_{n=0}^N C_n - A \sum_{j=0}^N B_j \right| =$

$= \left| \sum_{j=0}^N B_j (A_{N-j} - A) \right| \leq K \sum_{j=0}^N |A_j - A|$. Omdat $\lim_{j \rightarrow \infty} |A_j - A| = 0$, is, we-

gens (14.7), ook $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N |A_j - A| = 0$, dus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N C_n - A \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N B_j \right) = 0.$$

Wegens (14.7) is $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N B_j = B$, dus $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N C_n = AB$.

Nu bestaat $\lim_{N \rightarrow \infty} C_N$; uit (14.7) volgt dan $\lim_{N \rightarrow \infty} C_N =$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N C_n = AB, \text{ waarmee (14.8) bewezen is.}$$

(14.9) Als twee reeksen absoluut convergent zijn, dan is hun productreeks ook absoluut convergent.

Bewijs: Laat de reeksen $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ zijn en $A_n^* = \sum_{k=0}^n |a_k|$

en $B_n^* = \sum_{k=0}^n |b_k|$, dan is $A_n^* B_n^* = \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m |a_j| |b_{m-j}| +$

$$+ \sum_{m=n+1}^{2n} \sum_{j=m-n}^n |a_j| |b_{m-j}| \geq \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m |a_j| |b_{m-j}|. \text{ Laat } \sum_n c_n \text{ de}$$

productreeks van $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ zijn en $\sum_n c_n^*$ die van $\sum_n |a_n|$

en $\sum_n |b_n|$, dan is $|c_n| = \left| \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \right| \leq \sum_{m=0}^n |a_m| |b_{n-m}| = c_n^*$ en

$\sum_{m=0}^n c_m^* \leq A_n^* B_n^*$ en dit is begrensd omdat A_n^* en B_n^* beide convergeren.

Dus is $\sum_n c_n^*$ convergent en een majorant van $\sum_n |c_n|$, dus $\sum_n c_n$ is absoluut convergent.

Men kan zelfs bewijzen, dat de productreeks van twee convergente reeksen convergeert, als één van beide reeksen absoluut convergeert (stelling van Mertens). Wij zullen dit hier echter niet bewijzen.

Opgave 102. Bewijs met behulp van een productreeks dat $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$.

We leiden nu nog enkele convergentiecriteria voor reeksen af. Hiertoe eerst een hulpstelling:

(14.10) Als a_n en b_n rijen zijn, als $a_n > 0$ en $b_n > 0$ voor alle n ,

als $\sum_n b_n$ divergent is en als $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \alpha$ bestaat, dan is $\sum_n a_n$ convergent als $\alpha > 0$ en $\sum_n a_n$ divergent als $\alpha < 0$.

Bewijs: Als $\alpha > 0$, dan is er een N zodat voor $n > N$ geldt

$\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} > \frac{1}{2} \omega$, dus $a_{n+1} < \frac{2}{\omega} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right)$, dus $\sum_{k=N+2}^n a_k =$
 $= \sum_{k=N+1}^{n-1} a_{k+1} < \frac{2}{\omega} \left(\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} - \frac{a_n}{b_n} \right) < \frac{2}{\omega} \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}$. Hieruit volgt dat de partiële
 sommen van $\sum_n a_n$ begrensd zijn, en, wegens $a_n > 0$, volgt hieruit dat
 $\sum_n a_n$ convergent is. Als $\omega < 0$, dan is er een N zodat voor $n > N$
 geldt $\frac{1}{b_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} < 0$, dus $a_{n+1} > \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n$, dus $a_{n+1} > \frac{b_{n+1}}{b_{N+1}} a_{N+1} =$
 $\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} b_{n+1}$, dus $\sum_n a_n$ is een majorant van $\sum_n b_n$. Als $\sum_n a_n$ conver-
 gent was, zou $\sum_n b_n$ het ook zijn, dus $\sum_n a_n$ is divergent.

(14.11) (Convergentiecriterium van Raabe) Als a_n een rij is, als
 $a_n > 0$ voor alle n en als $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{\sigma}{n} \right) = 0$, dan is $\sum_n a_n$
 convergent als $\sigma > 1$ en $\sum_n a_n$ divergent als $\sigma < 1$.

Bewijs: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 \right) = \sigma - 1$. De stelling volgt nu
 uit (14.10) met $b_n = \frac{1}{n}$.

(14.12) (Convergentiecriterium van Gauss) Als a_n een rij is, als
 $a_n > 0$ voor alle n en als $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{\sigma}{n} \right) n^{1+\delta}$ begrensd is voor een
 $\delta > 0$, dan is $\sum_n a_n$ convergent als $\sigma > 1$ en divergent als $\sigma \leq 1$.

Bewijs: Voor $\sigma \neq 1$ volgt (14.12) direct uit (14.11). We behoe-
 ven dus slechts het geval $\sigma = 1$ te beschouwen. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^\delta} = 0$
 (7.9), is $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) n \log n = 0$. Nu is $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) n \log n =$
 $= n \log n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \log(n+1) + (n+1) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$. Nu is
 $x \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \log(1+x) = x \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, dus
 $n \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \log n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \log(n+1) \right) = -1$
 Daar $\sum_n \frac{1}{n \log n}$ divergent is (zie blz. 91), mogen we (14.10) met
 $b_n = \frac{1}{n \log n}$ toepassen; we concluderen, dat $\sum_n a_n$ divergent is.

De criteria van Raabe en Gauss zijn bijzonder bruikbaar als er
 een functie $f(x)$ bestaat, die voor $x = 0$ zekere differentieerbaar-
 heidseigenschappen bezit, zodat $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ (nog steeds is $a_n > 0$ voor
 alle n verondersteld). Laat eerst $f(x)$ continu in 0 zijn. Dan is
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = f(0)$ en het criterium van d'Alembert leert ons dat
 $\sum_n a_n$ convergent of divergent is naar gelang $f(0) > 1$ of $f(0) < 1$.

We behoeven dus alleen nog $f(0)=1$ te beschouwen. Veronderstel dan dat $f(x)$ differentieerbaar is in 0, dan is $f(x)=1+xf'(0)+x\varepsilon(x)$ met $\varepsilon(x)$ continu in 0 en $\varepsilon(0)=0$. Hieruit volgt dat $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{f'(0)}{n} \right) = 0$ en het criterium van Raabe leert ons dat $\sum_n a_n$ convergent of divergent is naar gelang $f'(0) > 1$ of $f'(0) < 1$. We behoeven dus alleen nog $f'(0)=1$ te beschouwen. Veronderstel dan dat $f(x)$ twee maal differentieerbaar is, dan is (7.1) $f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2f''(0)+x^2\varepsilon_1(x)$ met $\varepsilon_1(x)$ continu in 0 en $\varepsilon_1(0)=0$. Hieruit volgt dat $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 - \frac{1}{n} \right) n^2 = \frac{1}{2}f''(0) + \varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$ en het criterium van Gauss (met $\delta = 1$) leert ons dat $\sum_n a_n$ divergent is.

We zullen dit toelichten aan een reeds eerder behandeld voorbeeld, n.l. $\sum_n n^\alpha$ met willekeurige reële α . Substitueer in $\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}$ nu $n=\frac{1}{x}$ dan is $f(x) = \frac{x^{-\alpha}}{(x^{-1}+1)^\alpha} = (1+x)^{-\alpha}$. Nu is $f(0)=1$ en $f'(0)=-\alpha$; verder is $f(x)$ twee maal differentieerbaar. Dus $\sum_n n^\alpha$ is convergent voor $-\alpha > 1$, dus voor $\alpha < -1$ en divergent voor $\frac{n^\alpha}{n} \leq 1$, dus voor $\alpha \geq -1$.

We merken verder op, dat voor reeksen $\sum_n a_n$ met $a_n \neq 0$ voor alle n de convergentiecriteria van Raabe en Gauss op $\sum_n |a_n|$ kunnen worden toegepast. Ingeval convergentie gevonden wordt, is $\sum_n a_n$ absoluut convergent; ingeval divergentie gevonden wordt, kan slechts geconcludeerd worden dat $\sum_n a_n$ niet absoluut convergeert, maar niet, dat $\sum_n a_n$ divergeert.

Opgave 103. Onderzoek de convergentie van de binomiaalreeks $\sum_n \binom{\alpha}{n} x^n$ voor $x = -1$.

Opgave 104. Onderzoek voor welke waarden van α de reeksen $\sum_n \frac{1}{(\log n)^\alpha}$ en $\sum_n \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^\alpha$ convergeren.

Opgave 105. Onderzoek voor welke waarden van α , β en γ de reeks $\sum_n \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n)}{n! \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n)}$ convergeert.

§ 15. Enkele meetkundige toepassingen van de differentiaalrekening.

We zullen de differentiaalrekening nu toepassen bij de studie van krommen in het platte vlak. We denken ons een kromme gegeven door een parametervoorstelling $x=f(t)$, $y=g(t)$, waarin t een interval doorloopt, x en y rechthoekige coördinaten in het platte vlak voorstellen en de functies f en g aan nog nader vast te leggen differentieerbaarheidsvoorwaarden voldoen. De kromme is dan de meetkundige plaats van de punten (x,y) , waarbij een t te vinden is zodat $x=f(t)$, $y=g(t)$.

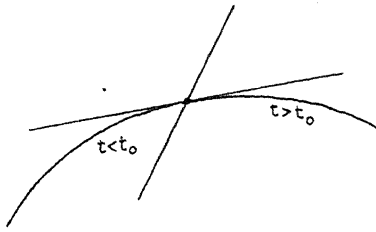
De grafiek van een functie $F(x)$ kan ook onder deze definitie gebracht worden, n.l. $x=t, y=F(t)$.

Als $G(x,y)$ een totaal differentieerbare functie van twee veranderlijken is, noemt men de punten (x,y) , waarvoor $G(x,y)=0$ geldt, ook wel een kromme. Als (a,b) een punt is, waarvoor geldt $G(a,b)=0$ en $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$ in een omgeving van (a,b) , dan is er, volgens stelling (11.10) over impliciete functies, een differentieerbare functie $\varphi(x)$, zodat in een omgeving van (a,b) de punten (x,y) die voldoen aan $y=\varphi(x)$ dezelfde zijn als de punten (x,y) die voldoen aan $G(x,y)=0$. In dat geval komen we ook bij ons begrip kromme terecht, mits we ons tot voldoende kleine omgevingen beperken. Daar we de rollen van x en y nog kunnen verwisselen geldt dit voor omgevingen van die punten waar $\frac{\partial G}{\partial x}$ en $\frac{\partial G}{\partial y}$ niet beide nul zijn.

We beschouwen dus een kromme bepaald door $x=f(t)$ en $y=g(t)$ waarin f en g differentieerbare functies zijn. Het is mogelijk, dat bij twee verschillende waarden van t hetzelfde punt behoort: $f(t_0)=f(t_1)$ en $g(t_0)=g(t_1)$ voor $t_0 \neq t_1$. Als er willekeurig dicht bij t_0 nog waarden t_1 zijn waarvoor dit geldt, geldt blijkbaar $f'(t_0)=g'(t_0)=0$. We noemen een punt $(f(t),g(t))$ waarvoor geldt $f'(t)=g'(t)=0$ een singulier punt van de kromme en veronderstellen verder steeds dat een kromme geen singuliere punten bezit; dan is er bij iedere t_0 een $\varepsilon > 0$, zodat voor $|t-t_0| < \varepsilon$ en $t \neq t_0$ geldt $f(t) \neq f(t_0)$ of $g(t) \neq g(t_0)$. Als de punten $(f(t),g(t))$ en $(f(t_0),g(t_0))$ verschillend zijn, gaat door deze twee punten een rechte lijn, die tot vergelijking heeft $(g(t)-g(t_0)) \cdot (x-f(t_0)) - (f(t)-f(t_0))(y-g(t_0)) = 0$, of ook $\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} (x-f(t_0)) + \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} (y-g(t_0)) = 0$. Laten we nu t naar t_0 naderen, dan nadert deze vergelijking blijkbaar tot $g'(t_0)(x-f(t_0)) - f'(t_0)(y-g(t_0)) = 0$, hetgeen de vergelijking is van de raaklijn aan de kromme in het punt $(f(t_0),g(t_0))$. Dit is in overeenstemming met de definitie van de raaklijn in een punt P van een kromme als de limietstand van een koorde door P en een ander punt Q van de kromme, als Q tot P nadert. De gevonden vergelijking is inderdaad de vergelijking van een rechte, daar we verondersteld hebben, dat $f'(t_0)$ en $g'(t_0)$ niet beide nul zijn.

Als de kromme gegeven is door $y=F(x)$, moeten we $f(t)=t$ en $g(t)=F(t)$ stellen; de vergelijking van de raaklijn wordt dan $F'(t_0)(x-t_0) - (y-F(t_0)) = 0$. Noemen we nu $t_0=x_0$, dan heeft de raaklijn in $(x_0,F(x_0))$ de vergelijking $y-F(x_0)=F'(x_0)(x-x_0)$.

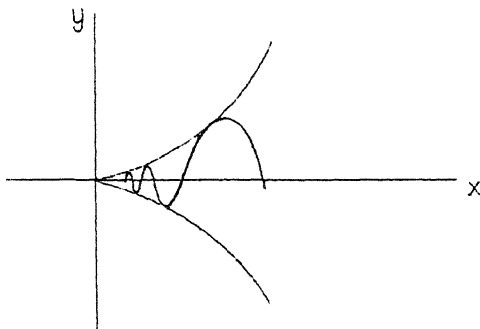
De raaklijn heeft de volgende eigenschap: iedere rechte door $(f(t_0),g(t_0))$, die niet de raaklijn in dat punt is, wordt door de kromme "gesneden", d.w.z. er is een omgeving van t_0 , zodat voor waarden van t in die omgeving van t_0 geldt, dat de punten van de kromme behorende bij $t < t_0$ aan de andere kant van de rechte liggen dan de punten van de kromme behorende bij $t > t_0$. Om dit in te zien schrijven we $f(t)=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)+(t-t_0)\varepsilon_1(t)$ en $g(t)=g(t_0)+g'(t_0)(t-t_0)+$



+ $(t-t_0)\varepsilon_2(t)$ met $\varepsilon_1(t_0)=\varepsilon_2(t_0)=0$ en $\varepsilon_1(t)$ en $\varepsilon_2(t)$ continu in t_0 . Nemen we nu een willekeurige rechte door $(f(t_0), g(t_0))$ met vergelijking $\alpha(x-f(t_0))+\beta(y-g(t_0))=0$ (α en β niet beide $= 0$) en vullen we in het lin-

kerlid van deze vergelijking een punt $(f(t), g(t))$ van de kromme in, dan komt er $\alpha(f'(t_0)(t-t_0)+(t-t_0)\varepsilon_1(t))+\beta(g'(t_0)(t-t_0)+(t-t_0)\varepsilon_2(t))=(\alpha f'(t_0)+\beta g'(t_0)+\alpha\varepsilon_1(t)+\beta\varepsilon_2(t))(t-t_0)$. Als nu de rechte niet de raaklijn in $(f(t_0), g(t_0))$ is, is $\alpha f'(t_0)+\beta g'(t_0)\neq 0$; we kunnen dan een $\varepsilon > 0$ kiezen zodat voor $|t-t_0| < \varepsilon$ geldt dat $\alpha f'(t_0)+\beta g'(t_0)+\alpha\varepsilon_1(t)+\beta\varepsilon_2(t)$ hetzelfde teken heeft als $\alpha f'(t_0)+\beta g'(t_0)$, d.w.z. een vast teken. Door de factor $t-t_0$, die er nog bijkomt, heeft het linkerlid van de vergelijking verschillend teken, naar gelang $t > 0$ of $t < 0$ is. Dit betekent juist dat de kromme aan verschillende kanten van de rechte ligt naar gelang $t > 0$ of $t < 0$ is.

Men zou nu kunnen denken dat in een zekere omgeving van t_0 de kromme wel aan dezelfde kant van de raaklijn ligt. Dat dit niet het geval behoeft te zijn toont het volgende voorbeeld. Kies $f(t)=t$ en $g(t)=t^2 \sin \frac{1}{t}$ voor $t\neq 0$ en $g(0)=0$, dan zijn $f(t)$ en $g(t)$ differentieerbaar (zie opgave 38). Nemen we nu $t_0=0$, dan is $f(0)=0$, $g(0)=0$, $f'(0)=1$, $g'(0)=0$. De vergelijking van de raaklijn wordt dan $y=0$, d.w.z. de X-as



Het is echter duidelijk, dat, hoe klein men ook de omgeving van 0 kiest er altijd nog punten boven en onder de X-as liggen.

We kunnen echter een voorwaarde geven, waaronder de kromme wel aan één kant van de raaklijn ligt: Stel $f(t)$

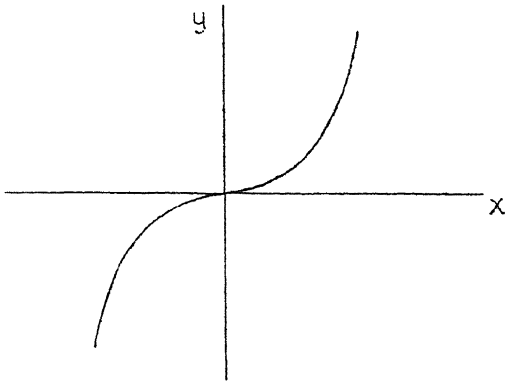
en $g(t)$ twee maal differentieerbaar,

dan is $f(t) = f(t_0)+(t-t_0)f'(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2 f''(t_0)+(t-t_0)^2 \varepsilon_3(t)$ en $g(t) = g(t_0)+(t-t_0)g'(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2 g''(t_0)+(t-t_0)^2 \varepsilon_4(t)$ met $\varepsilon_3(t)=\varepsilon_4(t)=0$ en $\varepsilon_3(t)$ en $\varepsilon_4(t)$ continu in t_0 . Vullen we nu het punt $(f(t), g(t))$ in de raaklijnvergelijking in, dan komt er

$$\begin{aligned} & g'(t_0)((t-t_0)f'(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2 f''(t_0)+(t-t_0)^2 \varepsilon_3(t)) + \\ & - f'(t_0)((t-t_0)g'(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2 g''(t_0)+(t-t_0)^2 \varepsilon_4(t)) = \\ & = \frac{1}{2}(g'(t_0)f''(t_0)-f'(t_0)g''(t_0)+2g'(t_0)\varepsilon_3(t)-2f'(t_0)\varepsilon_4(t))(t-t_0)^2. \end{aligned}$$

Als nu $g'(t_0)f''(t_0)-f'(t_0)g''(t_0)\neq 0$, dan kan men een $\varepsilon > 0$ kiezen, zodat voor $|t-t_0| < \varepsilon$ geldt, dat $g'(t_0)f''(t_0)-f'(t_0)g''(t_0)+2g'(t_0)\varepsilon_3(t)-2f'(t_0)\varepsilon_4(t)$ hetzelfde teken heeft als $g'(t_0)f''(t_0)-f'(t_0)g''(t_0)$, d.w.z. een vast teken. Daar $(t-t_0)^2 > 0$ voor $t\neq t_0$, heeft het linkerlid van de vergelijking een vast teken, dus ligt de kromme aan één

kant van de raaklijn.



Een voorbeeld van een punt van een kromme waar de zojuist genoemde voorwaarde niet vervuld is, is de kromme $f(t)=t$, $g(t)=t^3$ in $t_0=0$. Dan is $f(0)=0$, $g(0)=0$, $f'(0)=1$, $g'(0)=0$, $f''(0)=0$, $g''(0)=0$. De raaklijn is de X-as; $g'(0)f''(0)-f'(0)g''(0)=0$. De kromme ligt boven de X-as voor $t > 0$

en onder de X-as voor $t < 0$: het punt is een buigpunt, d.w.z. een punt dusdanig dat er een omgeving van t_0 is, zodat voor waarden van t in die omgeving van t_0 de kromme voor $t > t_0$ aan de ene en voor $t < t_0$ aan de andere kant van de raaklijn ligt.

We noemen een kromme k maal differentieerbaar als de bij deze kromme behorende functies $f(t)$ en $g(t)$ beide k maal differentieerbaar zijn.

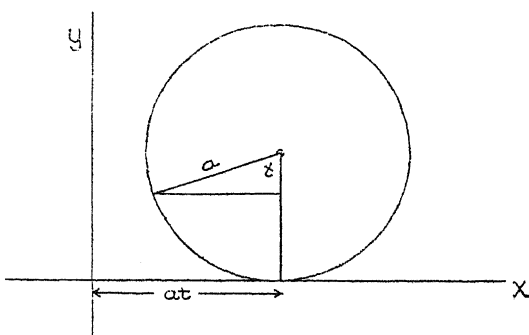
We hebben dus gevonden:

In een buigpunt van een twee maal differentieerbare kromme geldt $g'(t_0)f''(t_0)-f'(t_0)g''(t_0)=0$.

Het omgekeerde geldt niet: als $g'(t_0)f''(t_0)-f'(t_0)g''(t_0)=0$, behoeft het punt $(f(t_0), g(t_0))$ geen buigpunt te zijn. Voorbeeld: $f(t)=t$, $g(t)=t^4$ in $t_0=0$. Op deze kwestie gaan we niet verder in.

Als voorbeeld beschouwen we $f(t)=a \cos t$, $g(t)=b \sin t$ met $a > b > 0$ (ellips). Dan is $f'(t)=-a \sin t$, $g'(t)=b \cos t$, $f''(t)=-a \cos t$, $g''(t)=-b \sin t$. De vergelijking van de raaklijn in $(f(t_0), g(t_0))=(x_0, y_0)$ is $b \cos t_0 (x-a \cos t_0)+a \sin t_0 (y-b \sin t_0)=0$, dus $b \cos t_0 x + a \sin t_0 y = ab$, dus $\frac{bx_0}{a}x + \frac{ay_0}{b}y = ab$, dus $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. Verder is $g'(t)f''(t)-f'(t)g''(t) = -ab \neq 0$; een ellips heeft geen buigpunten. Uit $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ volgt direct dat de ellips ook voorgesteld wordt door de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Opgave 106. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in een punt van de parabool $f(t) = \frac{1}{2p} t^2$, $g(t) = t$ (p constant en > 0). Bepaal ook de buigpunten.



Als men een cirkel met straal a laat "rollen" over de X-as, beschrijft een punt op de omtrek van deze cirkel een kromme die cycloïde genoemd wordt. Blijkbaar is (zie figuur) een parametervoorstelling voor deze kromme de volgende:
 $f(t) = a(t - \sin t)$, $g(t) = a(1 - \cos t)$.

Opgave 107. Bepaal van een cycloïde: de singuliere punten, de vergelijking van de raaklijn in een willekeurig punt van de cycloïde en de buigpunten. Bepaal ook de hoek die een raaklijn met de positieve X-as maakt. Maak een schetsfiguur van de kromme.

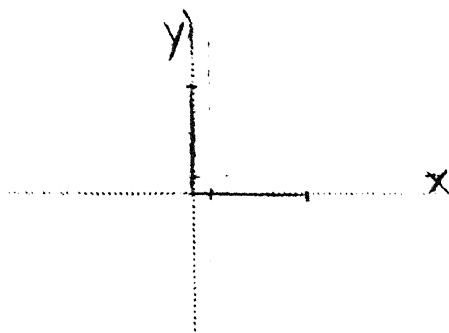
Als een kromme gegeven is door $y=F(x)$, dan gaat de buigpuntsvoorwaarde $g'(t_0)f''(t_0)-f'(t_0)g''(t_0)=0$ over in $F''(x_0)=0$.

De rechte lijn door een punt van een kromme loodrecht op de raaklijn in dat punt heet de normaal in dat punt van de kromme. De vergelijking van de normaal is blijkbaar $f'(t_0)(x-f(t_0))+g'(t_0)(y-g(t_0))=0$.

Opgave 108. Bepaal van de kromme bepaald door $f(t)=e^{at} \cos t$, $g(t)=e^{at} \sin t$ (logaritmische spiraal) de vergelijking van de raaklijn in een willekeurig punt P van de kromme en toon aan dat de hoek, die deze raaklijn maakt met de verbindingslijn van P en de oorsprong van het coördinatenstelsel, dezelfde is voor alle punten van de kromme.

Uit de analytische meetkunde is bekend, dat als $\alpha(x-a)+\beta(y-b)=0$ de vergelijking van een rechte lijn is, $x = a - \lambda\beta$, $y = b + \lambda\alpha$ met veranderlijke λ een parametervoorstelling van dezelfde rechte lijn is. Een parametervoorstelling voor de raaklijn is dus $x=f(t_0)+\lambda f'(t_0)$, $y=g(t_0)+\lambda g'(t_0)$ en voor de normaal $x=f(t_0)-\lambda g'(t_0)$, $y=g(t_0)+\lambda f'(t_0)$.

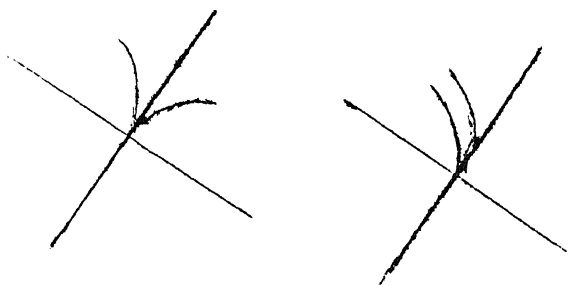
We lassen nog een opmerking in over singuliere punten. In een singulier punt van een kromme behoeft geen raaklijn te bestaan. Neem b.v.



$f(t)=0$ voor $t \leq 0$, $f(t)=e^{-\frac{1}{t^2}}$ voor $t > 0$, $g(t)=e^{-\frac{1}{t^2}}$ voor $t < 0$, $g(t)=0$ voor $t \geq 0$, dan zijn $f(t)$ en $g(t)$ willekeurig vaak differentieerbaar (zie opgave 64). Voor $t=0$ krijgen we

een singulier punt, n.l. het punt $(0,0)$. Het is duidelijk dat de kromme in dat punt geen raaklijn bezit. Als echter $f(t)$ en $g(t)$ twee maal differentieerbaar zijn en $f''(t)$ en $g''(t)$ in een singulier punt niet beide nul zijn, kunnen we over het karakter van de kromme in dat punt wel iets aantonen. Dan is, als $f'(t_0)=g'(t_0)=0$, $f(t)=f(t_0)+\frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2+(t-t_0)^2 \epsilon_1(t)$ en $g(t)=g(t_0)+\frac{1}{2}g''(t_0)(t-t_0)^2+(t-t_0)^2 \epsilon_2(t)$ met $\epsilon_1(t_0)=\epsilon_2(t_0)=0$ en $\epsilon_1(t)$ en $\epsilon_2(t)$ continu in t_0 . De rechte door $(f(t),g(t))$ en $(f(t_0),g(t_0))$ heeft tot vergelijking $(g(t)-g(t_0))(x-f(t_0))-(f(t)-f(t_0))(y-g(t_0))=0$, of

$\frac{1}{2}(t-t_0)^2((g''(t_0)+2\epsilon_2(t))(x-f(t_0))-(f''(t_0)+2\epsilon_1(t))(y-g(t_0)))=0$. De raaklijn geeft dus tot vergelijking $g''(t_0)(x-f(t_0))-f''(t_0)(y-g(t_0))=0$. Met een geheel analoge methode als hierboven kan men aantonen dat voor een willekeurige rechte door $(f(t_0),g(t_0))$, die niet de raaklijn is (b.v. de normaal) geldt, dat voor t voldoende dichtbij t_0 de punten behorende bij $t < t_0$ en de punten behorende bij $t > t_0$ aan dezelfde kant van de



rechte liggen. Het punt is een keerpunt, waarbij we nog de twee mogelijkheden verwachten dat de punten behorende bij $t > t_0$ en bij $t < t_0$ aan verschillende kanten of aan dezelfde kant van de raaklijn liggen. Dit zijn echter niet de enige mogelijkheden.

Opgave 109. Toon aan dat de singuliere punten van de cycloïde (zie opgave 107) keerpunten zijn en bepaal in een dergelijk punt de vergelijking van de raaklijn.

Opgave 110. Toon aan dat van de kromme bepaald door $f(t)=t^2$, $g(t)=t^4+t^5$ het punt behorende bij $t=0$ een keerpunt is, in de omgeving waarvan de kromme aan één kant van de raaklijn ligt.

Opgave 111. Toon aan dat van de kromme bepaald door $f(t)=t^2$, $g(t)=t^4 \sin \frac{1}{t}$ voor $t \neq 0$ en $g(0)=0$ het punt behorende bij $t=0$ een keerpunt is en onderzoek het gedrag van de kromme voor waarden van t in de omgeving van 0.

We keren nu weer terug tot de veronderstelling, dat de beschouwde krommen geen singuliere punten bevatten. We maken nog enige afspraken ter verkorting van de notatie. We schrijven $f(t_k)=x_k$ en $g(t_k)=y_k$ voor $k=0,1,2,\dots$, d.w.z. (x_k, y_k) is het punt van de kromme behorende bij de parameterwaarde t_k . Verder laten we het argument t weg als er geen gevaar voor misverstand is; we schrijven dan dus f , g , f' , g' enz.

We veronderstellen nu, dat de functies f en g twee maal differentieerbaar zijn met continue tweede afgeleiden. We noemen de kromme dan twee maal continu differentieerbaar (en analoog laten voor hogere afgeleiden). We gaan nu met een cirkel iets analoogs doen, als we in het voorafgaande met een rechte lijn gedaan hebben. We willen een cirkel leggen door drie punten van de kromme en de limietstand van deze cirkel bepalen als we twee van de drie punten tot het vastgehouden derde laten naderen. Door drie punten van het platte vlak gaat één en slechts één cirkel, mits die drie punten niet op één rechte liggen. Nu kunnen drie punten van een kromme zeer wel op één rechte liggen. We onderzoeken nu de consequenties van de veronderstelling dat er in een willekeurig kleine omgeving van t_0 nog van elkaar en van t_0 verschillende getallen t_1 en t_2 zijn, zodat de drie punten behorende bij t_0 , t_1 en t_2 op een rechte liggen. Laat deze rechte de vergelijking $\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) = 0$ (α en β niet beide $=0$) hebben. Dan is de functie $\alpha(f-x_0) + \beta(g-y_0)$ een differentieerbare functie van t , die voor t_0 , t_1 en t_2 de waarde 0 heeft. Volgens de stelling van Rolle zijn er dan hiertussen twee verschillende getallen t_3 en t_4 , waar de afgeleide functie $\alpha f' + \beta g'$ de waarde 0 heeft. Deze functie is weer differentieerbaar; nogmaal volgens de stelling van

Rolle is er een getal t_5 tussen t_3 en t_4 , waar $\alpha f'' + \beta g''$ de waarde nul heeft. Er geldt dus $\alpha f'(t_3) + \beta g'(t_3) = 0$ en $\alpha f''(t_5) + \beta g''(t_5) = 0$. Omdat α en β niet beide nul zijn, geldt dus $f'(t_3)g''(t_5) - g'(t_3)f''(t_5) = 0$. Daar we t_1 en t_2 willekeurig dicht bij t_0 kunnen kiezen, geldt op grond van de continuïteit ook $f'(t_0)g''(t_0) - g'(t_0)f''(t_0) = 0$.

We veronderstellen nu dat voor de beschouwde kromme geldt $f'g'' - g'f'' \neq 0$. De kromme bezit dus geen buigpunten. Verder heeft op grond van de continuïteit $f'g'' - g'f''$ een vast teken. Verder geldt nu, dat bij iedere t_0 een $\varepsilon > 0$ te vinden is zodat als t_1 en t_2 van elkaar en van t_0 verschillen en als $|t_1 - t_0| < \varepsilon$ en $|t_2 - t_0| < \varepsilon$ de drie punten van de kromme behorende bij t_0 , t_1 en t_2 niet op een rechte liggen, zodat door deze drie punten één en slechts één cirkel gaat. Laat de vergelijking van deze cirkel $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \rho^2 = 0$ zijn; het punt (α, β) is dus het middelpunt en $\rho > 0$ de straal van deze cirkel. Dan is de functie $(f - \alpha)^2 + (g - \beta)^2 - \rho^2$ een differentieerbare functie van t , die voor t_0 , t_1 en t_2 de waarde 0 heeft. Op grond van de stelling van Rolle zijn er dan hiertussen verschillende getallen t_3 en t_4 waar $2(f - \alpha)f' + 2(g - \beta)g'$ de waarde 0 heeft. Nogmaals volgens Rolle is er een getal t_5 tussen t_3 en t_4 waar $2(f')^2 + 2(f - \alpha)f'' + 2(g')^2 + 2(g - \beta)g''$ de waarde 0 heeft. Er geldt dus

$$\left. \begin{aligned} (f(t_3) - \alpha)f'(t_3) + (g(t_3) - \beta)g'(t_3) &= 0 \\ (f(t_5) - \alpha)f''(t_5) + (g(t_5) - \beta)g''(t_5) &= -(f'(t_5))^2 - (g'(t_5))^2 \end{aligned} \right\}.$$

Er is een $\varepsilon_1 > 0$ zodat uit $|u - t_0| < \varepsilon_1$ en $|v - t_0| < \varepsilon_1$ volgt, dat $f'(u)g''(v) - g'(u)f''(v) \neq 0$. Als dat n.l. niet zo was zou daaruit volgen, dat $f'(t_0)g''(t_0) - g'(t_0)f''(t_0) = 0$, hetgeen niet het geval is. Als nu t_1 en t_2 zo gekozen worden, dat $|t_1 - t_0| < \varepsilon_1$ en $|t_2 - t_0| < \varepsilon_1$ geldt, dan geldt ook $|t_3 - t_0| < \varepsilon_1$ en $|t_5 - t_0| < \varepsilon_1$, zodat $f'(t_3)g''(t_5) - g'(t_3)f''(t_5) \neq 0$. Dan kunnen op grond van het bovenstaande en op grond van de theorie van de lineaire vergelijkingen α en β geschreven worden als breuken, waarvan de tellers gehele rationale functies van $f(t_3)$, $g(t_3)$, $f'(t_3)$, $g'(t_3)$, $f(t_5)$, $g(t_5)$, $f'(t_5)$, $g'(t_5)$, $f''(t_5)$ en $g''(t_5)$ zijn en de beide noemers gelijk zijn aan $f'(t_3)g''(t_5) - g'(t_3)f''(t_5)$. Laten we nu t_1 en t_2 tot t_0 naderen, dan naderen t_3 en t_5 ook tot t_0 en dus naderen α en β elk tot een bepaalde limietwaarde a resp. b . Deze a en b zijn dan te vinden uit

$$\left. \begin{aligned} (f(t_0) - a)f'(t_0) + (g(t_0) - b)g'(t_0) &= 0 \\ (f(t_0) - a)f''(t_0) + (g(t_0) - b)g''(t_0) &= -(f'(t_0))^2 - (g'(t_0))^2 \end{aligned} \right\}.$$

Lost men hieruit a en b op, dan vindt men

$$a = f(t_0) - g'(t_0) \frac{(f'(t_0))^2 + (g'(t_0))^2}{f'(t_0)g''(t_0) - g'(t_0)f''(t_0)},$$

$$b = g(t_0) + f'(t_0) \frac{(f'(t_0))^2 + (g'(t_0))^2}{f'(t_0)g''(t_0) - g'(t_0)f''(t_0)}.$$

Het punt (a,b) heet het krommingsmiddelpunt behorende bij het punt (x_0, y_0) van de kromme. Uit de parametervoorstelling van de normaal volgt direct, dat het op de normaal in (x_0, y_0) van de kromme ligt. Uit $e^2 = (f(t_1) - a)^2 + (g(t_1) - b)^2$ volgt, dat, als we t_1 en t_2 tot t_0 laten naderen, e^2 nadert tot een limietwaarde $(f(t_0) - a)^2 + (g(t_0) - b)^2 =$

$$= \frac{((f'(t_0))^2 + (g'(t_0))^2)^3}{(f'(t_0)g''(t_0) - g'(t_0)f''(t_0))^2}, \text{ die, omdat } f'(t_0) \text{ en } g'(t_0) \text{ niet beide}$$

$= 0$ zijn, > 0 is en dus gelijk aan R^2 met $R > 0$ gesteld kan worden.

Dan is

$$R = \frac{(f'(t_0) + g'(t_0))^{3/2}}{|f'(t_0)g''(t_0) - g'(t_0)f''(t_0)|}.$$

R heet de kromtestraal behorende bij het punt (x_0, y_0) van de kromme. De limietstand van de cirkel door (x_0, y_0) , (x_1, y_1) en (x_2, y_2) als t_1 en t_2 tot t_0 naderen is de cirkel met middelpunt (a, b) en straal R ; deze cirkel heet de kromtecirkel in het punt (x_0, y_0) van de kromme. Omdat het middelpunt van deze cirkel op de normaal in (x_0, y_0) van de kromme ligt en de cirkel door (x_0, y_0) gaat, vallen de raaklijnen van de kromme en van de kromtecirkel in (x_0, y_0) samen.

Er is nog een andere manier om het krommingsmiddelpunt te vinden, n.l. als de limietstand van het snijpunt van de normalen in (x_0, y_0) en (x_1, y_1) als t_1 tot t_0 nadert. De normalen in (x_0, y_0) en (x_1, y_1) kunnen evenwijdig zijn of samenvallen; in dat geval is blijkbaar $f'(t_0)g'(t_1) - g'(t_0)f'(t_1) = 0$. Dan is $f'(t_0)g'(t) - g'(t_0)f'(t)$ een differentieerbare functie die voor t_0 en t_1 de waarde 0 heeft. Dus er is een getal t_2 tussen t_0 en t_1 waar $f'(t_0)g''(t) - g'(t_0)f''(t)$ de waarde 0 heeft. Als er nu willekeurig dicht bij t_0 nog waarden t_1 zijn, zodat de normalen in (x_0, y_0) en (x_1, y_1) evenwijdig of samenvallend zijn, geldt wegens de continuïteit $f'(t_0)g''(t_0) - g'(t_0)f''(t_0) = 0$. We hebben echter verondersteld, dat dit niet geldt. Dus er is bij t_0 een $\varepsilon > 0$ zodat uit $|t_1 - t_0| < \varepsilon$ volgt dat de normalen in (x_0, y_0) en (x_1, y_1) elkaar snijden. Als (α_1, β_1) het snijpunt is geldt dat $f'(\alpha_1 - f) + g'(\beta_1 - g)$ een differentieerbare functie is die voor t_0 en t_1 de waarde 0 heeft. Er is dus een t_2 tussen t_0 en t_1 , zodat $f''(\alpha_1 - f) - (f')^2 + g''(\beta_1 - g) - (g')^2$ voor t_2 de waarde 0 heeft. Er geldt dus

$$\left. \begin{aligned} f'(t_1)(\alpha_1 - f(t_1)) + g'(t_1)(\beta_1 - g(t_1)) &= 0 \\ f''(t_2)(\alpha_1 - f(t_2)) + g''(t_2)(\beta_1 - g(t_2)) &= (f'(t_2))^2 + (g'(t_2))^2 \end{aligned} \right\}.$$

Op geheel analoge wijze als hierboven is geschied, kan hieruit geconcludeerd worden, dat, als we t_1 tot t_0 laten naderen, α_1 en β_1 elk tot een limietwaarde naderen, die juist a , resp. b is. Het snijpunt van de normalen nadert dus tot het krommingsmiddelpunt.

Bij ieder punt van de kromme behoort een krommingsmiddelpunt. Laten we het punt de kromme doorlopen, dan doorloopt het krommingsmiddelpunt

een kromme $x = h(t)$, $y = k(t)$, gegeven door:

$$h = f - g' \frac{(f')^2 + (g')^2}{f'g'' - g'f''},$$

$$k = g + f' \frac{(f')^2 + (g')^2}{f'g'' - g'f''}.$$

Deze kromme heet de evoluut of ontwondene van de oorspronkelijke kromme. De betekenis van deze naam zal later verklaard worden.

We veronderstellen nu dat de oorspronkelijke kromme drie maal continu differentieerbaar is, dan is de evoluut continu differentieerbaar. We weten echter nog niet of de evoluut singuliere punten bezit.

De functie $r = \frac{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}}{|f'g'' - g'f''|}$ geeft ons de lengte van de kromtestralen als functie van de parameter op de kromme.

Ter afkorting voeren we in de hulpfunctie $\varphi = \frac{(f')^2 + (g')^2}{f'g'' - g'f''}$, dan is $h = f - g'\varphi$, $k = g + f'\varphi$. Verder is $h' = f' - g''\varphi - g'\varphi'$, $k' = g' + f''\varphi + f'\varphi'$. Maar

$$f' - g''\varphi = \frac{(f')^2 g'' - f'g'f'' - (f')^2 g'' - (g')^2 g''}{f'g'' - g'f''} = -g' \frac{f'f'' + g'g''}{f'g'' - g'f''},$$

$$g' + f''\varphi = \frac{f'g'g'' - (g')^2 f'' + (f')^2 f'' + (g')^2 f''}{f'g'' - g'f''} = f' \frac{f'f'' + g'g''}{f'g'' - g'f''}.$$

Dus

$$h' = -g' \left(\frac{f'f'' + g'g''}{f'g'' - g'f''} + \varphi' \right),$$

$$k' = f' \left(\frac{f'f'' + g'g''}{f'g'' - g'f''} + \varphi' \right).$$

Hieruit volgt direct, dat de normalen van de oorspronkelijke kromme de raaklijnen van de evoluut zijn.

Voor ieder reëel getal $\lambda \neq 0$ definiëren we $\text{sgn } \lambda$ (spreek uit: signum λ) als $+1$ als $\lambda > 0$ en -1 als $\lambda < 0$. Dan is $r =$

$= (\text{sgn } \varphi) ((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}} \varphi$. Hierin is $\text{sgn } \varphi$ een constante. Nu is

$$r' = (\text{sgn } \varphi) \left(\frac{f'f'' + g'g''}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}} \varphi + ((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}} \varphi' \right) =$$

$$= (\text{sgn } \varphi) ((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{f'f'' + g'g''}{f'g'' - g'f''} + \varphi' \right).$$

Hieruit volgt, dat van de evoluut die en slechts die punten singulier zijn voor welks parameter geldt $r' = 0$. Voeren we ter afkorting in

$\Psi = \frac{f'f'' + g'g''}{f'g'' - g'f''} + \varphi'$, dan is $(h')^2 + (k')^2 = ((f')^2 + (g')^2) \Psi^2$, zodat geldt

$$\sqrt{(h')^2 + (k')^2} = (\text{sgn } \varphi) (\text{sgn } \Psi) r'. \text{ We veronderstellen nu dat voor}$$

onze kromme (of voor het beschouwde gedeelte van onze kromme) geldt

$r' \neq 0$, dus $\Psi \neq 0$; dan is $\text{sgn } \Psi$ een constante. Geven we de booglengte (zie blz. 101) van het gedeelte van de evoluut gelegen tussen de punten met parameterwaarden λ en μ aan met $\sigma(\lambda, \mu)$, dan is $\sigma(\lambda, \mu) =$

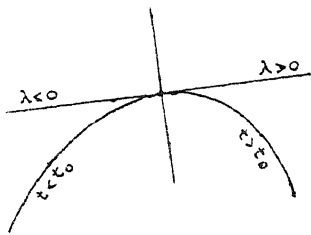
$$= \int_{\lambda}^{\mu} \sqrt{(h'(\tau))^2 + (k'(\tau))^2} d\tau \text{ en er geldt dan blijkbaar: } \sigma(t_0, t) + (\text{sgn } \varphi) (\text{sgn } \Psi) r = C, \text{ waarin } C \text{ een constante is, afhankelijk van de keuze van } t_0. \text{ Om de meetkundige betekenis hiervan te kunnen inzien, moe-}$$

ten we eerst nog enige tekenkwetsies regelen.

Laat een kromme gegeven zijn door de functies $f(t)$ en $g(t)$ en laat $f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon_1(t)$ en $g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t-t_0) + (t-t_0)\varepsilon_2(t)$ zijn met $\varepsilon_1(t_0) = \varepsilon_2(t_0) = 0$ en $\varepsilon_1(t)$ en $\varepsilon_2(t)$ continu in t_0 . Vullen we een punt van de kromme in in het linkerlid $f'(t_0)(x-f(t_0)) + g'(t_0)(y-g(t_0))$ van de normaalvergelijking, dan komt er

$(t-t_0)((f'(t_0))^2 + (g'(t_0))^2 + f'(t_0)\varepsilon_1(t) + g'(t_0)\varepsilon_2(t))$ en dit is, voor t in een omgeving van t_0 , > 0 voor $t > t_0$ en < 0 voor $t < t_0$. Vullen we nu een punt $(f(t_0) + \lambda f'(t_0), g(t_0) + \lambda g'(t_0))$ van de raaklijn aan de kromme in in hetzelfde linkerlid van de normaalvergelijking, dan komt er $\lambda((f'(t_0))^2 + (g'(t_0))^2)$ en dit is > 0 voor $\lambda > 0$ en < 0 voor

$\lambda < 0$. De punten van de kromme met $t > t_0$ (resp. $t < t_0$) en de punten van de raaklijn met $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$) liggen dus aan dezelfde kant van de normaal.

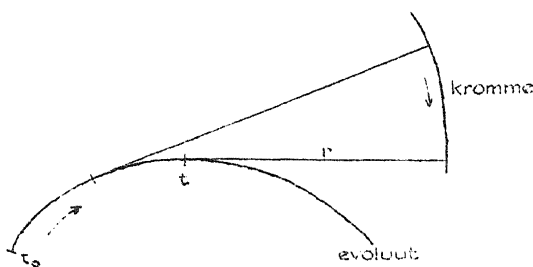


Een punt op een raaklijn van de evoloot is $(h + \lambda h', k + \lambda k')$, d.w.z. $(f - g'\varphi - \lambda g'\psi, g + f'\varphi + \lambda f'\psi)$. Nu

ligt het punt met dezelfde parameterwaarde van de oorspronkelijke kromme op deze raaklijn. Voor de bijbehorende waarde van λ geldt dan blijkbaar $\varphi + \lambda\psi = 0$, dus $\lambda = -\frac{\varphi}{\psi}$, dus $\text{sgn } \lambda = -(\text{sgn } \varphi)(\text{sgn } \psi)$ en we vinden de betrekking $\sigma(t_0, t) + (\text{sgn } \lambda)r = C$.

We veronderstellen nu eerst dat $\lambda > 0$ is. De situatie is dan, zo-

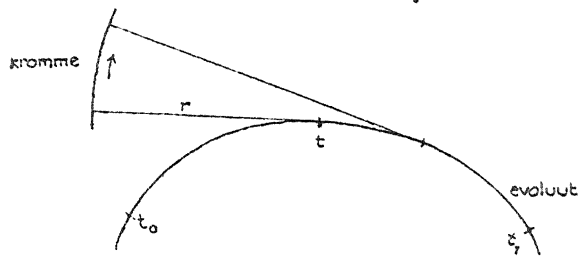
als hiernaast is getekend (de pijl geeft de richting aan, waarin de parameterwaarde toeneemt). Het punt van de oorspronkelijke kromme ligt op de raaklijn aan de evoloot in de richting van de toenemende t . Verder is de lengte van het stuk langs de raaklijn van de evoloot tot de oorspronkelijke kromme gelijk aan r (kromtestraal).



De betrekking $\sigma(t_0, t) + r = C$ zegt nu dat voor $t > t_0$ de booglengte van de evoloot tussen de punten met parameters t_0 en t plus de lengte van het stuk van de raaklijn aan de evoloot tot aan de oorspronkelijke kromme constant is. We kunnen dit ook mechanisch beschrijven. Denkt men zich een draad langs de evoloot gespannen en wikkelt men deze af, terwijl men de draad steeds strak gespannen houdt, dan vindt men de oorspronkelijke kromme terug als de lengte van de draad geschikt gekozen wordt: daarom noemt men de oorspronkelijke kromme een evolvente of ontwindende van de evoloot. De naam evoloot is daarmee ook verklaard. We spreken van een evolvente, daar men door verschillende draadlengten te

kiezen verschillende evolventen bij één kromme kan vinden.

Het geval dat $\lambda < 0$ is kunnen we op analoge wijze behandelen.



De situatie is nu, zoals hiernaast getekend. Verder is $\sigma(t_0, t) - r = C$. Kiezen we nu een t_1 groter dan de beschouwde waarden van t , dan is $\sigma(t_0, t) = \sigma(t_0, t_1) - \sigma(t, t_1)$, dus $\sigma(t, t_1) + r = \sigma(t_0, t_1) - C = C_1$. Ook nu is de oorspronkelijke kromme een evolvent van zijn evoluit; het afwikkelen geschiedt nu echter in de

andere richting. Hiermee hebben we het volgende gevonden.

Een drie maal continu differentieerbare kromme $x = f(t)$, $y = g(t)$, waarvoor geldt $f'g'' - g'f'' \neq 0$ en $\frac{f'f'' + g'g''}{f'g'' - g'f''} + \varphi' \neq 0$, waarin $\varphi = \frac{(f')^2 + (g')^2}{f'g'' - g'f''}$, is een evolvente van zijn evoluit.

Opgave 112. Bepaal de evoluit van de ellips $f(t) = a \cos t$, $g(t) = b \sin t$. Bepaal de singuliere punten van de evoluit en maak een schets-figuur.

Opgave 113. Bepaal de evoluit van de cycloïde $f(t) = a(t - \sin t)$, $g(t) = a(1 - \cos t)$ en bewijs dat deze congruent is met de gegeven cycloïde.

De omgekeerde stelling dat een kromme de evoluit is van al zijn evolventen bewijzen we nu.

Laat een continu differentieerbare kromme gegeven zijn door $x = f(t)$, $y = g(t)$, dan is een evolvente bepaald door $x = h(t)$, $y = k(t)$, waarin $h = f + \lambda f'$, $k = g + \lambda g'$, waarin λ bepaald is door $\lambda \sqrt{(f')^2 + (g')^2} +$

$$\int_{t_0}^t \sqrt{(f'(\tau))^2 + (g'(\tau))^2} d\tau = C. \text{ Ter afkorting voeren we in}$$

$$\omega = C - \int_{t_0}^t \sqrt{(f'(\tau))^2 + (g'(\tau))^2} d\tau, \text{ dan is } \lambda = \frac{\omega}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ en}$$

$$h = f + \frac{f'\omega}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}}, k = g + \frac{g'\omega}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}}. \text{ Verder is } \omega' =$$

$$-((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}. \text{ Veronderstel nu, dat de gegeven kromme twee maal con-}$$

$$\text{tinu differentieerbaar is. Dan is } h' = f' + \frac{f'\omega'}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \omega \left(\frac{f'}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}} \right)' \text{ en } k' = g' + \frac{g'\omega'}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}} + \omega \left(\frac{g'}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}} \right)'.$$

$$\text{Nu is } \left(\frac{f'}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}} \right)' = \frac{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}} f'' - f'(f'f'' + g'g'')}{((f')^2 + (g')^2)^2} =$$

$$= -g' \frac{f'g'' - g'f''}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}} \text{ en analoog } \left(\frac{g'}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}} \right)' = f' \frac{f'g'' - g'f''}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}}.$$

Zo vinden we

$$h' = -g' \frac{\omega(f'g'' - g'f'')}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}},$$

$$k' = f' \frac{\omega(f'g'' - g'f'')}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}}.$$

Hieruit volgt dat de raaklijn aan de evolvente loodrecht staat op de raaklijn aan de oorspronkelijke kromme. Men drukt dit wel uit door te zeggen dat de evolvente een orthogonale trajectorie is van de raaklijnen van de oorspronkelijke kromme.

We veronderstellen nu dat $f'g'' - g'f'' \neq 0$ en $\omega \neq 0$, dan heeft de evolvente geen singuliere punten. (In een punt, waar $\omega = 0$ zou zijn, zou de evolvente de oorspronkelijke kromme snijden.) Om van de evolvente de evolut te kunnen bepalen, veronderstellen we de gegeven kromme drie maal continu differentieerbaar. Ter afkorting voeren we in $\xi =$

$$= \frac{\omega(f'g'' - g'f'')}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}}, \text{ dan is } h' = -g'\xi, \quad k' = f'\xi, \text{ dus } h'' = -g''\xi - g'\xi',$$

$k'' = f''\xi + f'\xi'$, dus $h'k'' - k'h'' = (f'g'' - g'f'')\xi^2$. Verder is $(h')^2 + (k')^2 = \xi^2((f')^2 + (g')^2)$. Dus $h - k \frac{(h')^2 + (k')^2}{h'k'' - k'h''} = f + \frac{f'\omega}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}} - f'\xi \frac{(f')^2 + (g')^2}{f'g'' - g'f''} = f$ en evenzo $k + h' \frac{(h')^2 + (k')^2}{h'k'' - k'h''} = g$. Als evolut van de evolvente vinden we dus de oorspronkelijke kromme terug. We hebben dus gevonden:

Een drie maal continu differentieerbare kromme $x = f(t)$, $y = g(t)$, waarvoor geldt $f'g'' - g'f'' \neq 0$, is de evolut van elk zijner evolventen, die de oorspronkelijke kromme niet snijdt.

Opgave 114. Bepaal de evolventen van de cycloïde $f(t) = a(t - \sin t)$, $g(t) = a(1 - \cos t)$ en laat zien dat er voor een bepaalde keuze van de constante C weer een cycloïde uitkomt.

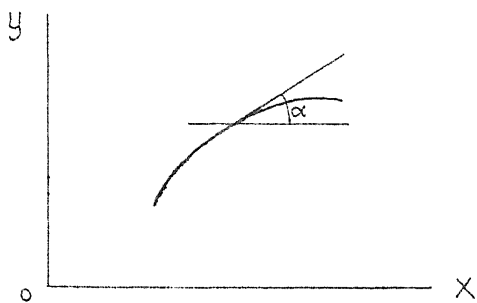
Onder de kromming κ in een punt van een kromme verstaan we de ver-

andering van de hoek α , die de raaklijn met de positieve X-as maakt per booglengte-eenheid. De booglengte $\sigma =$

$$= \int_{t_0}^t ((f'(\tau))^2 + (g'(\tau))^2)^{1/2} d\tau, \text{ dus } \sigma' =$$

$$= ((f')^2 + (g')^2)^{1/2}. \text{ Verder is } \alpha \text{ bepaald door } f'((f')^2 + (g')^2)^{-1/2} = \cos \alpha \text{ en } g'((f')^2 + (g')^2)^{-1/2} = \sin \alpha. \text{ Als in}$$

het beschouwde punt $f' \neq 0$ is, gaan we de tweede betrekking differentieren en vinden $g''((f')^2 + (g')^2)^{-1/2} - g'((f')^2 + (g')^2)^{-3/2}(f'f'' + g'g'') =$
 $= \alpha' \cos \alpha = \alpha' f'((f')^2 + (g')^2)^{-1/2}$, dus $g''((f')^2 + (g')^2) - g'(f'f'' + g'g'') =$
 $= \alpha' f'((f')^2 + (g')^2)$, dus $\alpha' = \frac{f'g'' - g'f''}{(f')^2 + (g')^2}$, dus $\kappa = \frac{\alpha'}{\sigma'} =$
 $= \frac{f'g'' - g'f''}{((f')^2 + (g')^2)^{3/2}}$. Als in het beschouwde punt $f' = 0$, dus $g' \neq 0$ is,



differentiëren we de eerste betrekking voor α en vinden hetzelfde resultaat voor α' , dus voor κ . De kromming is dus op het teken na gelijk aan het omgekeerde van de kromtestraal. De kromming heeft echter ook zin als $f'g'' - g'f'' = 0$ en is dan nul; men zegt wel dat de kromtestraal dan oneindig is.

Ten slotte maken we nog een opmerking over krommen, die door een impliciete vergelijking $G(x,y) = 0$ gegeven zijn. Zoals we reeds opmerkten is, als $G(x,y)$ continu partiëel differentieerbaar is, in een omgeving van een punt van de kromme waar $\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0$ of $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$, de kromme door een expliciete functie voor te stellen. In dat geval is dus de hierboven gegeven behandelingswijze van toepassing. We beschouwen nu het geval, dat $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y} = 0$ is, nog iets nader. Een dergelijk punt heet een singulier punt van de kromme; we merken op, dat dit een ander begrip singulier punt is dan dat, hetgeen optreedt bij krommen in parametervoorstelling.

We nemen dus aan, dat voor (x_0, y_0) geldt $G(x_0, y_0) = \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$. Om de zaak niet te ingewikkeld te maken, nemen we verder aan dat $G(x,y)$ twee maal continu differentieerbaar is en dat in (x_0, y_0) minstens één van $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ niet gelijk aan nul is.

We beschouwen een in een omgeving van (x_0, y_0) twee maal continu differentieerbare functie $F(x,y)$. Noem $\xi = x_0 + t(x-x_0)$, $\eta = y_0 + t(y-y_0)$ en $f(t) = F(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))$, dan is $f(0) = F(x_0, y_0)$ en $f(1) = F(x,y)$. Verder is $f'(t) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial \eta}(y-y_0)$ en $f''(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}(y-y_0)^2$. Volgens de formule van Taylor met restterm van Lagrange (10.4) geldt $f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2}f''(\vartheta)$ met $0 \leq \vartheta \leq 1$. Voor $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ geldt dan $F(x,y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial \xi}(x-x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial \eta}(y-y_0) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial \xi^2}(x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial \xi \partial \eta}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial \eta^2}(y-y_0)^2 \right\} + \frac{1}{6}((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \varepsilon(x,y)$, waarin $\varepsilon(x,y) = \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \left(\frac{\partial^2 F(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial \xi^2} \right) + 2 \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \left(\frac{\partial^2 F(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{(y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \left(\frac{\partial^2 F(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial \eta^2} \right)$. Dit geldt, als we $\varepsilon(x_0, y_0) = 0$ stellen, ook voor $x = x_0$, $y = y_0$; bovendien is dan $\varepsilon(x,y)$ continu in (x_0, y_0) .

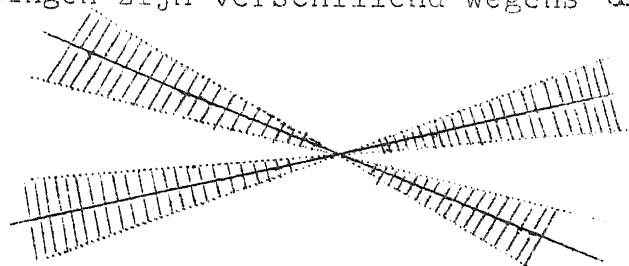
Passen we dit nu toe op de hierboven gegeven functie $G(x,y)$, dan vinden we, als we ter afkorting $p = \frac{\partial^2 G(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $q = \frac{\partial^2 G(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ en $s = \frac{\partial^2 G(x_0, y_0)}{\partial y^2}$ schrijven: $G(x,y) = \frac{1}{2}(p(x-x_0)^2 + 2q(x-x_0)(y-y_0) + s(y-y_0)^2) + \frac{1}{2}((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \varepsilon(x,y)$ met $\varepsilon(x_0, y_0) = 0$ en $\varepsilon(x,y)$ continu in (x_0, y_0) . Voeren we in de omgeving van (x_0, y_0) poolcoördinaten in door $x = x_0 + r \cos \varphi$, $y = y_0 + r \sin \varphi$, dan komt er $G(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) = \frac{1}{2}r^2(p(\cos \varphi)^2 + 2q \cos \varphi \sin \varphi + s(\sin \varphi)^2) + \frac{1}{2}r^2 \varepsilon(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi)$. Voor de punten $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ waarvoor $G(x,y) = 0$, geldt dus, wegens $r \neq 0$, $p(\cos \varphi)^2 + 2q \cos \varphi \sin \varphi + s(\sin \varphi)^2 + \varepsilon(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) = 0$. Nu is $(\cos \varphi)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$, $(\sin \varphi)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$, $\cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$. We kunnen dus ook schrijven: $p + s + (p-s) \cos 2\varphi + 2q \sin 2\varphi + 2\varepsilon(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) = 0$. We veronderstellen nu voorlopig, dat niet geldt $p = s$ en $q = 0$, dan is $\sqrt{4q^2 + (p-s)^2} > 0$. We kunnen dan α bepalen, zodat $\sin \alpha = \frac{2q}{\sqrt{4q^2 + (p-s)^2}}$, $\cos \alpha = \frac{p-s}{\sqrt{4q^2 + (p-s)^2}}$. Dan is

$p + s + (p-s) \cos 2\varphi + 2q \sin 2\varphi = p + s + \sqrt{4q^2 + (p-s)^2} \cos(2\varphi - \alpha)$. Veronderstel nu eerst $ps > q^2$, dan is $(p+s)^2 > 4q^2 + (p-s)^2$, dus $|p+s| > \sqrt{4q^2 + (p-s)^2}$ dus $|p+s + \sqrt{4q^2 + (p-s)^2} \cos(2\varphi - \alpha)| \geq |p+s| - \sqrt{4q^2 + (p-s)^2} > 0$. Er is nu een $\delta > 0$, zodat, als $|x-x_0| < \delta$, $|y-y_0| < \delta$, geldt $|\varepsilon(x,y)| < \frac{1}{2}(|p+s| - \sqrt{4q^2 + (p-s)^2})$. Dan is zeker $p + s + (p-s) \cos 2\varphi + 2q \sin 2\varphi + 2\varepsilon(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) \neq 0$, dus $G(x,y) \neq 0$ voor $(x,y) \neq (x_0, y_0)$. Het punt (x_0, y_0) is een geïsoleerd punt van de kromme: er is een omgeving van (x_0, y_0) te vinden, waarbinnen behalve (x_0, y_0) geen verdere punten van de kromme liggen. In het geval dat $p = s$ en $q = 0$ vinden we op analoge wijze een geïsoleerd punt; dan is ook $ps > q^2$.

Als $ps < q^2$, dan is $|p+s| < \sqrt{4q^2 + (p-s)^2}$; we kunnen dan een ω kiezen zodat $\cos \omega = -\frac{p+s}{\sqrt{4q^2 + (p-s)^2}}$, dan is $\omega \neq n\pi$ voor alle gehele n .

Dan is $p + s + \sqrt{4q^2 + (p-s)^2} \cos(2\varphi - \alpha) = \sqrt{4q^2 + (p-s)^2} (\cos(2\varphi - \alpha) - \cos \omega) = -2\sqrt{4q^2 + (p-s)^2} \sin(\varphi - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\omega) \sin(\varphi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\omega)$ en dit is nul voor

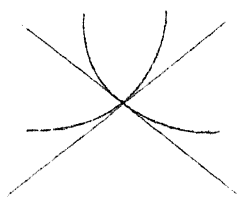
$\varphi = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\omega + n\pi$ en voor $\varphi = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\omega + n\pi$ (n willekeurig geheel), d.w.z. in twee richtingen gaande door het punt (x_0, y_0) . Deze twee richtingen zijn verschillend wegens $\omega \neq n\pi$. Kies nu een $\varepsilon > 0$ en



$< \frac{1}{2}\omega$, dan is, als $|\varphi - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\omega - n\pi| \geq \varepsilon$ en $|\varphi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\omega - n\pi| \geq \varepsilon$ voor alle gehele n , $|p + s + \sqrt{4q^2 + (p-s)^2} \cos(2\varphi - \alpha)| \geq 2\sqrt{4q^2 + (p-s)^2} (\sin \varepsilon)^2 > 0$. Er is dan een $\delta > 0$, zodat, als $|x-x_0| < \delta$,

Errata: Op blz. 123 toevoegen bij de keuze van ω , dat $0 < \omega < \pi$ en bij de keuze van ε , dat $\varepsilon < \frac{1}{2}(\pi - \omega)$.

$|y - y_0| < \delta$, geldt $|\varepsilon(x, y)| < \sqrt{4q^2 + (p-s)^2}(\sin \varepsilon)^2$. In een voldoende kleine omgeving van (x_0, y_0) geldt dus, als φ aan bovenstaande ongelijkheden voldoet, $G(x, y) \neq 0$. Alle eventuele punten van de kromme hebben dus in de omgeving een φ die minder dan ε verschilt van de twee zojuist gevonden richtingen (ze liggen dus in het gebied, dat in de figuur gearceerd is). Voor $\varphi = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\omega + n\pi + \varepsilon$ geldt $p+s + \sqrt{4q^2 + (p-s)^2} \cos(2\varphi - \alpha) = 2\sqrt{4q^2 + (p-s)^2} \sin \varepsilon \sin(\omega - \varepsilon) > 2\sqrt{4q^2 + (p-s)^2}(\sin \varepsilon)^2 > 0$ wegens $\omega - \varepsilon < \pi - 3\varepsilon$; voor $\varphi = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\omega + n\pi - \varepsilon$ geldt $p+s + \sqrt{4q^2 + (p-s)^2} \cos(2\varphi - \alpha) = -2\sqrt{4q^2 + (p-s)^2} \sin \varepsilon \sin(\omega + \varepsilon) < -2\sqrt{4q^2 + (p-s)^2}(\sin \varepsilon)^2 < 0$ wegens $\omega + \varepsilon < \pi - \varepsilon$. Verder geldt, als $r < \delta$, ook $|x - x_0| < \delta$ en $|y - y_0| < \delta$, dus $|\varepsilon(x, y)| < \sqrt{4q^2 + (p-s)^2}(\sin \varepsilon)^2$. Voor een r met $0 < r < \delta$ en $\varphi = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\omega + n\pi + \varepsilon$ heeft $G(x, y)$ dus het tegengestelde teken als voor die r en $\varphi = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\omega + n\pi - \varepsilon$. Er is dus een waarde van φ daartussen gelegen waarvoor $G(x, y) = 0$. Voor $\varphi = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\omega + n\pi - \varepsilon$ en $\varphi = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\omega + n\pi + \varepsilon$ geldt een analoge redenering. Meetkundig betekent dit dus dat op de omtrek van de cirkel met middelpunt in (x_0, y_0) een straal $r < \delta$, in elk van de vier in bovenstaande figuur gearceerde hoeken minstens één punt van de kromme ligt en buiten het gearceerde gebied geen punt van de kromme ligt. De koorde die een dergelijk punt en het punt (x_0, y_0) verbindt, maakt met één van de beide lijnen door (x_0, y_0) bepaald door $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha - \omega)$ en $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \omega)$ een hoek $< \varepsilon$.



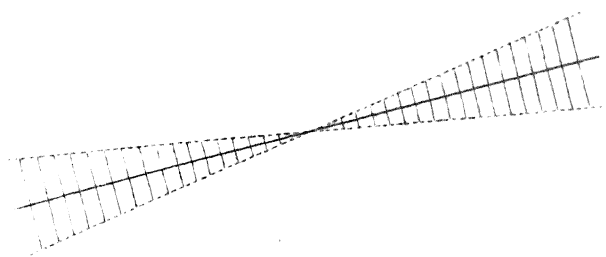
Door ε naar nul te laten naderen, zien we dat er twee limietstanden van koorde zijn.

De kromme bestaat in (x_0, y_0) uit twee takken, die elk een raaklijn hebben (taktangenten). Een dergelijk punt heet een knooppunt. De taktangenten worden gevonden uit

$p(x-x_0)^2 + 2q(x-x_0)(y-y_0) + s(y-y_0)^2 = 0$, hetgeen de vergelijking is van een lijnenpaar door (x_0, y_0) .

Ten slotte het geval $ps = q^2$. Dan is $(p+s)^2 = (p-s)^2 + 4q^2$; er is dus een β te bepalen, zodat $\sin \beta = -\frac{2q}{p+s}$, $\cos \beta = -\frac{p-s}{p+s}$, dan is $p+s + (p-s)\cos 2\varphi + 2q \sin 2\varphi = (p+s)(1 - \cos(2\varphi - \beta)) = 2(p+s)(\sin(\varphi - \frac{1}{2}\beta))^2$. Dit is nul voor $\varphi = \frac{1}{2}\beta + n\pi$ (n willekeurig geheel) en heeft voor alle overige φ hetzelfde teken. Kiezen we nu een $\varepsilon > 0$ en $< \frac{1}{2}\pi$, dan is, als $|\varphi - \frac{1}{2}\beta + n\pi| \geq \varepsilon$ voor alle gehele n , $|2(p+s)(\sin(\varphi - \frac{1}{2}\beta))^2| \geq 2|p+s|(\sin \varepsilon)^2 > 0$. Er is dan een $\delta > 0$, zodat, als $|x - x_0| < \delta$,

$|y-y_0| < \delta$, geldt $|\varepsilon(x,y)| < |p+s|(\sin \varepsilon)^2$. In een voldoende kleine omgeving van (x_0, y_0) geldt dus, als φ aan bovenstaande ongelijkheid voldoet, $G(x,y) \neq 0$. Alle eventuele punten van de kromme hebben dus in die omgeving een φ die minder dan ε verschilt van de richting



bepaald door $\frac{1}{2}\beta$ (ze liggen dus in het gebied dat in de figuur gearceerd is). Of er echter dergelijke punten zijn, valt niet uit te maken. De voorbeelden in opgave 115 tonen aan, dat het mogelijk is, dat er een omgeving is van (x_0, y_0) , waar behalve (x_0, y_0) geen punten van de kromme in liggen, m.a.w. dat (x_0, y_0) een geïsoleerd punt van de kromme is, maar dat het ook mogelijk is dat er in een willekeurig kleine omgeving van (x_0, y_0) nog punten $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ van de kromme liggen. In het laatste geval zien we, door ε naar nul te laten naderen, dat de koorde die dergelijke punten met (x_0, y_0) verbinden tot één bepaalde limietstand naderen, dat er dus één bepaalde raaklijn in (x_0, y_0) is. Deze raaklijn is te vinden uit $p(x-x_0)^2 + 2q(x-x_0)(y-y_0) + s(y-y_0)^2 = 0$, omdat het linkerlid van deze vergelijking op een constante factor $\neq 0$ na het kwadraat van een lineaire veelterm in x en y is. Aan de voorbeelden in opgave 115 zien we dan nog, dat (x_0, y_0) wel of geen keerpunt kan zijn.

Opgave 115. Toon aan dat van de volgende krommen het punt $(0,0)$ een singulier punt is met $ps = q^2$: de kromme $x^4 + y^2 = 0$ met een geïsoleerd punt in $(0,0)$, de kromme $x^3 - y^2 = 0$ met een keerpunt in $(0,0)$, de kromme $x^4 - 2x^2y + y^2 = 0$ met in $(0,0)$ wel een raaklijn maar geen keerpunt.

Hetgeen we gevonden hebben kunnen we dus als volgt samenvatten:

Als $G(x,y)$ twee maal partieel differentieerbaar is met continue afgeleiden van de tweede orde en (x_0, y_0) is een singulier punt van de kromme $G(x,y) = 0$, waar niet alle afgeleiden van de tweede orde nul zijn en als $A = \left(\frac{\partial^2 G(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 G(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G(x_0, y_0)}{\partial y^2}$, dan is, als $A < 0$, het punt (x_0, y_0) een geïsoleerd punt van de kromme en als $A > 0$, het punt (x_0, y_0) een knooppunt van de kromme. Als $A = 0$, dan kan (x_0, y_0) een geïsoleerd punt zijn of niet; in het laatste geval is er één en slechts één raaklijn in (x_0, y_0) aan de kromme, waarbij het punt al dan niet een keerpunt van de kromme kan zijn. In alle gevallen wordt (worden) de eventuele raaklijn(en) gevonden uit

$$\frac{\partial^2 G(x_0, y_0)}{\partial x^2} (x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 G(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} (x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 G(x_0, y_0)}{\partial y^2} (y-y_0)^2 = 0;$$

als $A < 0$, voldoet aan deze vergelijking echter alleen het punt (x_0, y_0) .

Men kan aantonen, dat, als $G(x,y)$ drie maal partieel differentieerbaar met continue afgeleiden van de derde orde wordt veronder-

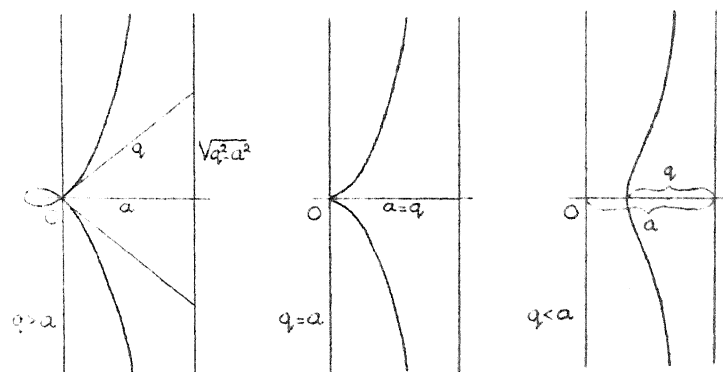
steld en als $A = 0$, dan "in het algemeen" het punt (x_0, y_0) een keerpunt is. Hiermee is met "in het algemeen" bedoeld: "als voldaan is aan een zekere ongelijkheid, waar de partiële afgeleiden van de tweede en derde orde van G in optreden"

Het in elkaar overgaan van de singuliere punten van de verschillende soorten kan mooi gedemonstreerd worden aan het volgende voorbeeld. Neem in het platte vlak een punt O , een rechte lijn l , die niet door O gaat en een lijnstuklengte $q > 0$. Gevraagd wordt de meetkundige plaats der punten P , zodat $\overline{PQ} = q$, als Q het snijpunt van OP met l is. Kies het coördinatenstelsel zo, dat O de oorsprong is en l de rechte $x = a$ met $a > 0$. Laat P de coördinaten (α, β) hebben, dan is blijkbaar $\alpha \neq 0$ (als $\alpha = 0$, dan is OP de Y -as die evenwijdig is met l). De rechte OP heeft tot vergelijking $\beta x - \alpha y = 0$; hieruit volgt direct, dat Q de coördinaten $(a, \frac{\beta a}{\alpha})$ heeft. Dus moet $\sqrt{(\alpha - a)^2 + (\beta - \frac{\beta a}{\alpha})^2} = q$ zijn, of aequivalent hiermee $\frac{(\alpha - a)^2(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2} = q^2$. De vergelijking van de meetkundige plaats is

dus $\frac{(x-a)^2(x^2+y^2)}{x^2} - q^2 = 0$. Voor $x \neq 0$ is dit aequivalent met

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - q^2x^2 = 0 \text{ of met } x^2(x^2+y^2) - 2ax(x^2+y^2) + a^2y^2 - (q^2 - a^2)x^2 = 0$$

De kromme die door deze vergelijking wordt voorgesteld heet conchoïde van Nicomedes. Het enige punt met $x = 0$ dat aan deze vergelijking voldoet is de oorsprong; we vragen ons af in hoeverre dit punt gerekend moet worden bij de meetkundige plaats. Als $P = O$, is OP onbepaald; als er een lijn door O is, dusdanig dat $\overline{OQ} = q$, kunnen we O bij de meetkundige plaats meerekenen. Klaarblijkelijk is dat het geval als $q \geq a$. Als $q < a$ bevat de conchoïde van Nicomedes het punt $(0,0)$, dat niet tot de meetkundige plaats behoort.



De oorsprong is een singulier punt. Voor $q > a$ is het een knooppunt; de taktangenten worden bepaald uit $a^2y^2 - (q^2 - a^2)x^2 = 0$; het zijn dus de rechten $ay - \sqrt{q^2 - a^2}x = 0$ en $ay + \sqrt{q^2 - a^2}x = 0$. Voor $q = a$ is het een keerpunt met als

raaklijn de X -as, voor $q < a$ is het een geïsoleerd punt. Aan de figuur is de overgang duidelijk te zien: gaan we uit van $q > a$ en laten we q tot a naderen, dan naderen de raaklijnen in O tot de X -as en wordt het lusje links van de Y -as steeds kleiner (het snijpunt met de X -as is $(a-q, 0)$). Zo gaat het knooppunt over in een keerpunt. Laten we $q < a$ worden, dan maakt de kromme zich los van de oorsprong. We merken nog op dat er nog een gedeelte van de kromme rechts van de lijn $x = a$ is; dit is in de figuur niet getekend.

Opgave 116. Bepaal de vergelijking van de meetkundige plaats der punten waarvoor het product der afstanden tot $(c,0)$ en $(-c,0)$ constant is. Toon aan, dat als men de constante zo kiest dat de kromme door de oorsprong gaat (lemniscate van Bernoulli), de oorsprong een knooppunt van de kromme is; bepaal de taktangenten.

§ 16. Gewone differentiaalvergelijkingen.

Voor de functie $f(x) = \sin x$ geldt $f''(x) = -\sin x$, dus $f''(x) + f(x) = 0$ voor alle x . Stellen we $y = \sin x$, dan kunnen we dat korter schrijven $y'' + y = 0$. We zeggen dan dat $y = \sin x$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $y'' + y = 0$. Om enig idee te krijgen hoe de oplossingen van een dergelijke vergelijking eruit zien zullen we om te beginnen alle oplossingen van deze vergelijking bepalen. Laat $y(x)$ een op een interval gedefinieerde oplossing zijn (we schrijven kortweg y voor zo'n functie en evenzo voor andere functies). Omdat y een oplossing is, is y twee maal differentieerbaar. Stel nu $u = \frac{y}{\sin x}$, dus $y = u \sin x$, dan is u op een interval dat geen punt $x = n\pi$ (n willekeurig geheel) bevat een tweemaal differentieerbare functie. Er geldt $y' = u \cos x + u' \sin x$ en $y'' = -u \sin x + 2u' \cos x + u'' \sin x$, dus $0 = y'' + y = u'' \sin x + 2u' \cos x$. Veronderstel nu dat er een interval I bestaat waar $u' \neq 0$, dan is in I , wegens de continuïteit van u' , overal $u' > 0$ of overal $u' < 0$. Neem eerst het geval dat in I overal $u' > 0$ is. Dan kunnen we in I stellen $z = \log u'$, dus $u' = e^z$, dan is z een differentieerbare functie. Verder geldt $u'' = e^z z'$, dus $0 = u'' \sin x + 2u' \cos x = e^z z' \sin x + 2e^z \cos x$, dus, wegens $e^z \neq 0$, $z' = -2 \frac{\cos x}{\sin x}$, dus $z = -2 \log \sin x + A$ met een constante A , dus $u' = e^z = \frac{B}{(\sin x)^2}$ met $B = e^A > 0$. Daar dit $\neq 0$ is voor alle x geldt deze betrekking niet alleen in I maar voor alle x in een interval tussen $n\pi$ en $(n+1)\pi$. Als $u' < 0$ in I , verkrijgen we door $z = \log(-u')$ te stellen op analoge wijze $u' = -\frac{B}{(\sin x)^2}$ met $B > 0$. Ook dit geldt in een interval tussen $n\pi$ en $(n+1)\pi$. Als er geen interval bestaat waarbinnen $u' \neq 0$ is, geldt, wegens de continuïteit van u' , dat $u' = 0$ identiek geldt. In alle gevallen kunnen we dus stellen $u' = \frac{B}{(\sin x)^2}$ met constante B in een interval tussen $n\pi$ en $(n+1)\pi$. Dan is $u = -B \cotg x + D$ met constante D , dus $y = -B \cos x + D \sin x$ en $y' = B \sin x + D \cos x$ in een interval tussen $n\pi$ en $(n+1)\pi$. Als het interval waarop y gedefinieerd is een punt $m\pi$ (m geheel) in zijn inwendige bevat en $y = -B_1 \cos x + D_1 \sin x$ voor $(m-1)\pi < x < m\pi$ en $y = -B_2 \cos x + D_2 \sin x$ voor $m\pi < x < (m+1)\pi$, dan geldt wegens de continuïteit van y en y' in $m\pi$, dat $-B_1(-1)^m = -B_2(-1)^m$ en $D_1(-1)^m = D_2(-1)^m$, dus $B_1 = B_2$ en $D_1 = D_2$. Op zijn gehele definitie-interval is dus y te schrijven als $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ met constante C_1 en C_2 . Omgekeerd is $C_1 \sin x + C_2 \cos x$ met willekeurige constante C_1 en C_2 een oplossing van de differentiaalvergelijking.

lijking, zoals door substitutie direct blijkt. We hebben dus gevonden, dat de functies $C_1 \sin x + C_2 \cos x$ met willekeurige constante C_1 en C_2 alle mogelijke op een interval gedefinieerde oplossingen van de differentiaalvergelijking $y''+y=0$ voorstellen.

We zien aan dit voorbeeld, dat een differentiaalvergelijking vele oplossingen kan bezitten en wel bleek de situatie hier zo, dat er twee constanten willekeurig gekozen konden worden. Dat het er twee zijn, komt omdat de hoogst optredende afgeleide in de vergelijking een van de tweede orde is. Dit verschijnsel zal blijken zeer algemeen te zijn. Een zeer speciaal geval ervan is ons al lang bekend, nl. de vergelijking $y' = \varphi(x)$ met gegeven continue functie $\varphi(x)$. Als $\Phi(x)$ een primitieve functie van $\varphi(x)$ is, is de algemene oplossing van deze vergelijking $y = \Phi(x) + C$ met willekeurige constante C .

Men kan omgekeerd bij een stelsel functies met twee willekeurige constanten (parameters) door differentiëren en elimineren dikwijls een differentiaalvergelijking vinden, waaraan alle functies van het stelsel voldoen. Zo krijgt men uit $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$, $y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$, door eliminatie van C_1 en C_2 de betrekking

$$\begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x \\ y' & \cos x & -\sin x \\ y'' & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0$$

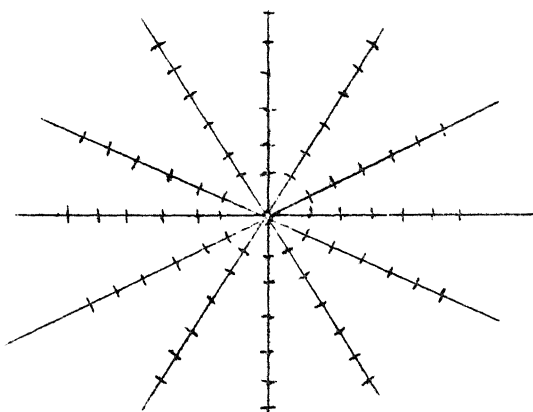
en dit geeft weer $y''+y=0$. Neemt men als ander voorbeeld $y = Cx$ (alle rechten door de oorsprong, behalve de Y-as), dan is $y' = C$ en we vinden als differentiaalvergelijking $y = y'x$. Het kan echter zijn, dat de zo gevonden differentiaalvergelijking nog andere oplossingen bezit dan de functies waar we van uit gingen. Neemt men b.v. het stelsel rechten $y = Cx - \frac{1}{2}C^2$, dan is $y' = C$ en de differentiaalvergelijking wordt $y = y'x - \frac{1}{2}(y')^2$. Aan deze vergelijking voldoet echter ook $y = \frac{1}{2}x^2$.

Na deze inleiding gaan we over tot een algemene definitie. Als $F(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$ een functie van $n+2$ veranderlijken is en $f(x)$ een n maal differentieerbare functie van één veranderlijke, dusdanig dat $F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$ voor alle x in het definitie-interval van $f(x)$, dan heet $f(x)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Deze differentiaalvergelijking heet een gewone differentiaalvergelijking van de n^e orde; x heet de onafhankelijk veranderlijke, y de afhankelijk veranderlijke. Het woord "gewoon" slaat op het feit, dat het een differentiaalvergelijking is, waarvan de oplossingen functies van één veranderlijke zijn. Een differentiaalvergelijking, waarvan de oplossingen functies van meer dan één veranderlijke zijn heet een partiële differentiaalvergelijking; deze vergelijkingen behandelen we hier niet. Het is de taak van de theorie van de differentiaalvergelijkingen methoden te ontwikkelen om van bepaalde typen van differentiaalverge-

lijkingen (alle) oplossingen te vinden. We behandelen in deze paragraaf alleen een aantal eenvoudige gevallen.

Dikwijls vinden we de oplossing van een differentiaalvergelijking niet in de vorm van een expliciete functie $f(x)$ maar in de vorm van een impliciete vergelijking $g(x,y) = 0$. We zullen daarmee tevreden zijn en de differentiaalvergelijking in dat geval als opgelost beschouwen. Verder zullen we het bepalen van een primitieve functie van een gegeven op een interval gedefinieerde continue functie als uitvoerbaar beschouwen; we beschouwen een differentiaalvergelijking dus als opgelost, als we het vinden van de oplossingen hebben teruggebracht tot het éénmaal of enige malen bepalen van primitieve functies. Men noemt in de theorie van de differentiaalvergelijkingen het bepalen van een primitieve functie vaak een quadratuur.

We beginnen met het eenvoudigste type van differentiaalvergelijkingen, n.l. die van de eerste orde $F(x,y,y') = 0$. We veronderstellen eerst eens, dat uit deze impliciete betrekking de veranderlijke y' expliciet oplosbaar is: $y' = G(x,y)$. Oplossingen $g(x,y) = 0$ stellen meetkundig krommen in het platte vlak voor; hiervan is in ieder punt y' de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Door de differentiaalvergelijking $y' = G(x,y)$ wordt in ieder punt (x,y) een raaklijnrichting y' voorgeschreven; men zegt dat de differentiaalvergelijking een richtingsveld bepaalt. Men kan daarvan een schetsfiguur tekenen door in elk punt een stukje rechte in



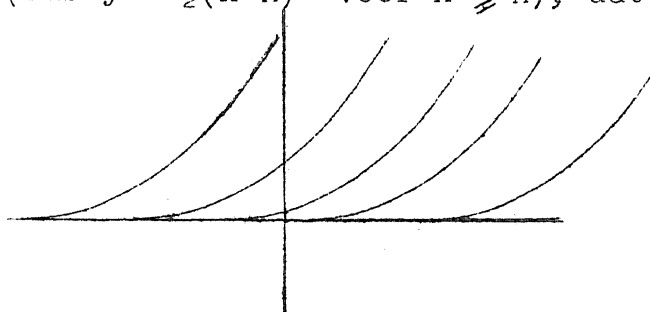
de voorgeschreven richting te tekenen.

In de figuur is dat uitgevoerd voor de vergelijking $y' = -\frac{x}{y}$. Om een oplossing te vinden moet een kromme worden bepaald die "bij het richtingsveld past", d.w.z. een kromme waarvan de raaklijn in elk punt de voorgeschreven richting heeft. Het richtingsveld beschouwende verwachten we,

dat door elk punt één oplossingskromme zal gaan. In het getekende voorbeeld zien we direct, dat alle cirkels met middelpunt in de oorsprong bij het richtingsveld passen.

Een vaak gebruikte methode bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen is het verwisselen van de rollen van onafhankelijk en afhankelijk veranderlijken; we bepalen dan x als functie van y in plaats van y als functie van x . Neem b.v. de vergelijking $y' = \varphi(y)$ waarin $\varphi(y)$ een op een interval gedefinieerde continue functie is. Stel dat we een op een interval gedefinieerde oplossing $y(x)$ hebben. Als er een deelinterval I is waarin $y' \neq 0$ is, kunnen we in I de functie $y(x)$ omkeren tot een functie $x(y)$, gedefinieerd op een interval J ; er geldt dan $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\varphi(y)}$. In J kunnen we een primitieve functie $\int \frac{dy}{\varphi(y)}$ bepalen; er geldt dan

$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + A$ met constante A . Als het interval I zo groot mogelijk gekozen is, d.w.z. zo dat elk van beide randpunten $\pm \infty$ is of een punt waar $y' = 0$, dan is J een interval, zodat elk van beide randpunten $\pm \infty$ is of een punt waar $\varphi(y) = 0$. Immers als in een randpunt van J zou gelden $\varphi(y) \neq 0$, dan was daar x begrensd en $\frac{dx}{dy}$ gedefinieerd en $= \frac{1}{\varphi(y)}$, en het corresponderende randpunt van I eindig en een punt waar $y' \neq 0$. In een interval, waarop $y' = 0$ voor alle x , is $y = C$ waarin C een constante is; daar dit aan de differentiaalvergelijking voldoet is $\varphi(C) = 0$. De oplossingen van de vergelijking $y' = \varphi(y)$ zijn dus bepaald door $x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + A$ met willekeurige constante A op alle zo groot mogelijke intervallen voor y waar $\varphi(y) \neq 0$ en door $y = C$ voor iedere constante C , waarvoor $\varphi(C) = 0$ geldt en door differentieerbare functies die ontstaan door deze oplossingen aan elkaar te lijmen (dat deze functies inderdaad aan de vergelijking voldoen is duidelijk). Dat dergelijke aan elkaar gelijkde oplossingen inderdaad op kunnen treden, zien we aan het volgende voorbeeld. Neem de vergelijking $y' = \sqrt{2y}$ voor $y \geq 0$. Daar $\int \frac{dy}{\sqrt{2y}} = \sqrt{2y}$, vinden we de oplossingen $y = 0$ en $x = \sqrt{2y} + A$ (dus $y = \frac{1}{2}(x-A)^2$ voor $x \geq A$), dat zijn de stijgende takken van de parabolen $y = \frac{1}{2}(x-A)^2$ en de X -as. Men



ziet echter direct, dat men ook oplossingen krijgt door van $-\infty$ tot een zekere A de X -as te nemen en dan langs de daar beginnende parabool verder te gaan.

Opgave 117. Bepaal de oplossingen van $y' = y$, $y' = 1+y^2$, $y' = \sqrt{1-y^2}$, $y' = 1-y^2$. Schets het verloop van de oplossingskrommen.

De zojuist behandelde vergelijking is een speciaal geval van de vergelijking $\varphi(x)\Psi(y)y' = \chi(x)\omega(y)$, waarin $\varphi(x)$ en $\chi(x)$ continu zijn en gedefinieerd op een interval I en $\Psi(y)$ en $\omega(y)$ continu zijn en gedefinieerd op een interval J . Verder geldt voor geen enkele x in I dat $\varphi(x) = \chi(x) = 0$ en voor geen enkele y in J dat $\Psi(y) = \omega(y) = 0$. Verder veronderstellen we dat er geen interval is, waar $\varphi(x) = 0$ voor alle x en geen interval waar $\Psi(y) = 0$ voor alle y . Stel dat er een interval I_1 bestaat, zodat als x in I_1 ligt geldt $\omega(y) \neq 0$. Als x het interval I_1 doorloopt, is de verzameling der functiewaarden y ook een interval J_1 , eventueel slechts bestaande uit één enkel punt. In het laatste geval is y constant en $y' = 0$, dus wegens $\omega(y) \neq 0$, is $\chi(x) = 0$ voor alle x in I_1 . Als y niet constant is vormen we $\Lambda(t) = \int \frac{\varphi(t)}{\omega(t)} dt$ voor t in J_1 , hetgeen mogelijk is daar $\omega(t) \neq 0$ voor t in J_1 . Stellen we nu $u = \Lambda(y)$, dan is $u' = \frac{\varphi(y)}{\omega(y)} y'$ en $\varphi(x)u' = \frac{\varphi(x)\Psi(y)y'}{\omega(y)} = \chi(x)$. Wegens $\omega(y) \neq 0$ is $\varphi(x) \neq 0$ voor alle x in I_1 (uit $\varphi(x) = 0$ zou volgen $\chi(x) \neq 0$ dus $\omega(y) = 0$). Dus $u' = \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, dus $u = \int \frac{\chi(x)}{\varphi(x)} dx + A$ met

constante A, dus y voldoet aan de impliciete vergelijking $\int \frac{\Psi(y)}{\omega(y)} dy = \int \frac{\chi(x)}{\phi(x)} dx + A$. Deze impliciete betrekking bepaalt y als functie van x als $\Psi(y) \neq 0$. De eerder gevonden oplossingen $y = \text{constant}$ en $\chi(x) = 0$ voldoen ook aan deze betrekking. Als I_1 zo groot mogelijk gekozen is, is J_1 een interval, zodat elk van beide randpunten $\pm \infty$ is of een punt waar $\omega(y) = 0$ of een randpunt van J . In een interval I_2 , dusdanig dat als x in I_2 ligt geldt $\omega(y) = 0$, geldt wegens $\Psi(y) \neq 0$, dat $\phi(x)y' = 0$. In elk deelinterval I_3 van I_2 waar $\phi(x) \neq 0$ geldt dan $y' = 0$, dus $y = B$ met een constante B , waarvoor geldt $\omega(B) = 0$. Hiermee is het volgende gevonden:

(16.1) (Scheiding van veranderlijken) De differentiaalvergelijking $\phi(x) \Psi(y) y' = \chi(x) \omega(y)$, waarin $\phi(x)$ en $\chi(x)$ continu zijn en gedefinieerd op een interval I en $\Psi(y)$ en $\omega(y)$ continu zijn en gedefinieerd op een interval J , waarvoor geldt dat voor geen enkele x in I geldt $\phi(x) = \chi(x) = 0$ en voor geen enkele y in J geldt $\Psi(y) = \omega(y) = 0$ en verder dat er geen interval is waar $\phi(x) = 0$ voor alle x en geen interval waar $\Psi(y) = 0$ voor alle y , heeft als oplossingen functies bepaald door $\int \frac{\Psi(y)}{\omega(y)} dy = \int \frac{\chi(x)}{\phi(x)} dx + A$ met willekeurige constante A , waarin y een zo groot mogelijk interval doorloopt waarop $\omega(y) \neq 0$ en x een zo groot mogelijk interval waarop $\phi(x) \neq 0$, door $y = B$ voor iedere constante B , waarvoor geldt $\omega(B) = 0$ en door iedere differentieerbare functie die ontstaat door deze oplossingen aan elkaar te lijmen.

Dat de als oplossingen in (16.1) genoemde functies inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoen is duidelijk.

Opgave 118. Bepaal de oplossingen van $4yy' = -x$, $xy' = 2y$, $xe^y y' = 1$. Schets het verloop van de oplossingskrommen.

Voor het volgende type van differentiaalvergelijkingen, dat we zullen behandelen, hebben we het begrip homogene functie nodig. Een functie $f(x_1, \dots, x_n)$ van n veranderlijken heet homogeen van de graad α (α een reëel getal), als voor ieder punt $(a_1, \dots, a_n)$ waarvoor f gedefinieerd is en ieder reëel getal $\lambda > 0$ geldt dat f ook gedefinieerd is in $(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$ en dat $f(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = \lambda^\alpha f(a_1, \dots, a_n)$. Zo is $x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{y}{x} + y^{-\frac{1}{2}}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ een homogene functie van de graad $\frac{1}{2}$. Voor een functie van de graad 0 krijgen we $f(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = f(a_1, \dots, a_n)$. Het product (resp. quotiënt) van twee homogene functies van de graden α_1 en α_2 is een homogene functie van de graad $\alpha_1 + \alpha_2$ (resp. $\alpha_1 - \alpha_2$); dit is evident.

We beschouwen nu de differentiaalvergelijking $y' = \phi(x, y)$, waarin ϕ een continue homogene functie van de graad 0 is (b.v. het quotiënt van twee homogene functies van dezelfde graad), dusdanig dat $\phi(1, y)$ en $\phi(-1, -y)$ op intervallen voor y gedefinieerd zijn. Laat y een op een interval gedefinieerde oplossing van deze vergelijking zijn. Voor $x > 0$

stellen we $u = \frac{y}{x}$, dan is $y = xu$ en $y' = xu' + u$, dus $xu' + u = \varphi(x, xu) = \varphi(1, u)$, dus $xu' = \varphi(1, u) - u$. Als omgekeerd u een op een interval gedefinieerde oplossing van de vergelijking $xu' = \varphi(1, u) - u$ is, dan geldt voor de functie $y = xu$ voor $x > 0$, dat $y' = xu' + u = \varphi(1, u) = \varphi(x, xu) = \varphi(x, y)$. Voor $x < 0$ gaat het analoog met $xu' = \varphi(-1, -u) - u$. Zo vinden we:

(16.2) (Homogene differentiaalvergelijking) De differentiaalvergelijking $y' = \varphi(x, y)$, waarin φ een continue homogene functie van de graad 0 is, dusdanig dat $\varphi(1, y)$ en $\varphi(-1, -y)$ op intervallen voor y gedefinieerd zijn, heeft voor $x > 0$ (resp. $x < 0$) als oplossingen $y = xu$, waarin u een oplossing is van de differentiaalvergelijking $xu' = \varphi(1, u) - u$ (resp. $xu' = \varphi(-1, -u) - u$), die van het type is, dat in (16.1) behandeld is.

In vele gevallen is $\varphi(-1, -u) = \varphi(1, u)$, zodat het dan niet nodig is $x > 0$ en $x < 0$ afzonderlijk te behandelen.

Opgave 119. Bepaal de oplossingen van $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$, $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$. Schets het verloop van de oplossingskrommen.

We beschouwen nu de differentiaalvergelijking $y' = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$, waarin $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ constanten zijn, α, β en γ niet alle drie $= 0$ zijn en φ een op een interval gedefinieerde continue functie is. We beschouwen eerst het geval dat het stelsel van twee lineaire vergelijkingen $ax+by+c=0$ en $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ een oplossing ξ, η bezit. Als y een op een interval gedefinieerde oplossing van de differentiaalvergelijking is, stellen we, als $x \neq \xi$ is, $u = \frac{y-\eta}{x-\xi}$, dan is $y = \eta + (x-\xi)u$ en $y' = u + xu'$. Verder is $ax+by+c = ax+b\eta+b(x-\xi)u+c = (a+bu)(x-\xi)$ wegens $a\xi+b\eta+c=0$ en analoog $\alpha x+\beta y+\gamma = (\alpha+\beta u)(x-\xi)$, dus er geldt $xu' = \varphi\left(\frac{a+bu}{\alpha+\beta u}\right) - u$, dus u voldoet aan een differentiaalvergelijking, die met scheiding van veranderlijken te behandelen is. Omgekeerd leidt een op een interval gedefinieerde oplossing u van $xu' = \varphi\left(\frac{a+bu}{\alpha+\beta u}\right) - u$ door $y = \eta + (x-\xi)u$ te stellen voor $x \neq \xi$ tot een oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (ga dat zelf na). Als de lineaire vergelijkingen $ax+by+c=0$ en $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ strijdig zijn, geldt $a\beta = \alpha b$. Stel nu eerst dat $\beta \neq 0$ is, dan is $a = \frac{b\alpha}{\beta}$ en $\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma} = \frac{b(\alpha x+\beta y)+\beta c}{\beta(\alpha x+\beta y+\gamma)}$. Als nu y een op een interval gedefinieerde oplossing is van de differentiaalvergelijking, stellen we $u = \alpha x + \beta y$ dan is $u' = \alpha + \beta y' = \alpha + \beta \varphi\left(\frac{bu+\beta c}{\beta(u+\gamma)}\right)$, dus u voldoet aan een differentiaalvergelijking, die met scheiding van veranderlijken te behandelen is. Omgekeerd leidt een op een interval gedefinieerde oplossing u van $u' = \alpha + \beta \varphi\left(\frac{bu+\beta c}{\beta(u+\gamma)}\right)$ door $y = \frac{u-\alpha x}{\beta}$ te stellen tot een oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking (ga dat zelf na). Als $\beta = 0$, dan is $\alpha b = 0$, dus $\alpha = 0$ of $b = 0$. Als $b = 0$ is, komt er $y' = \varphi\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right)$, dus $y = \int \varphi\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right) dx + A$ met constante A . Als $b \neq 0$ is, is $\alpha = 0$ en komt er $y' = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{\gamma}\right)$. Laat y een op een interval gedefinieerde oplossing hiervan zijn; we stellen dan $u = ax+by$, dan is $u' = a+by' = a+b\varphi\left(\frac{u+c}{\gamma}\right)$, dus u voldoet aan een differentiaalvergelijking, die met scheiding van

veranderlijken te behandelen is. Omgekeerd leidt een op een interval gedefinieerde oplossing u van $u' = a + b\varphi\left(\frac{u+c}{\gamma}\right)$ door $y = \frac{u-ax}{b}$ te stellen tot een oplossing van de oorspronkelijke vergelijking (ga dat zelf na). We hebben dus gevonden:

(16.3) De differentiaalvergelijking $y' = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$, waarin a, b, c, α, β en γ constanten zijn, α, β en γ niet alle drie $= 0$ en φ een op een interval gedefinieerde continue functie, is door een transformatie van veranderlijken terug te brengen op een eerder behandelde differentiaalvergelijking. Als er twee reële getallen ξ, η bestaan zodat $a\xi + b\eta + c = 0$ en $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$ voldoet de transformatie $u = \frac{y-\eta}{x-\xi}$. Als $a\beta = \alpha b$ en $\beta \neq 0$, voldoet $u = \alpha x + \beta y$. Als $\alpha = \beta = 0, b \neq 0$, voldoet $u = ax + by$. Als $b = \beta = 0$ is de gegeven differentiaalvergelijking al van een eerder behandeld type.

Opgave 120. Bepaal de oplossingen van $y' = 2\frac{2x+3y+1}{2x-y-3}, y' = -\frac{1}{2}\left(\frac{2x+y+1}{2x+y+2}\right)^2$.

We beschouwen nu de vergelijking $y' + \varphi(x)y = \psi(x)$, waarin $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ op een interval gedefinieerde continue functies zijn. Deze is een lineaire differentiaalvergelijking. Als $\psi(x) = 0$ voor alle x (homogene lineaire differentiaalvergelijking), zijn we in het geval van scheiding van veranderlijken en vinden we als oplossingen $y = 0$ en $\int \frac{dy}{y} = -\int \varphi(x)dx + A$ met constante A , dus $\log |y| = -\int \varphi(x)dx + A$, dus $y = Be^{-\int \varphi(x)dx}$ met constante $B \neq 0$. De algemene oplossing is dus $y = Be^{-\int \varphi(x)dx}$ met willekeurige constante B . Er zijn geen aan elkaar gelijkde oplossingen. Stel nu, dat we een willekeurige oplossing $y(x)$ van de inhomogene vergelijking hebben. Dan stellen we $u = ye^{\int \varphi(x)dx}$, dan is $u' = y'e^{\int \varphi(x)dx} + \varphi(x)ye^{\int \varphi(x)dx} = \psi(x)e^{\int \varphi(x)dx}$, dus $u = \int \psi(x)e^{\int \varphi(x)dx}dx + A$ met constante A , dus $y = ue^{-\int \varphi(x)dx} = e^{-\int \varphi(x)dx} \int \psi(x)e^{\int \varphi(x)dx}dx + Ae^{-\int \varphi(x)dx}$ met constante A . Omgekeerd voldoet deze functie met willekeurige constante A aan de differentiaalvergelijking, zoals bij substitutie blijkt. We hebben dus gevonden:

(16.4) (Lineaire differentiaalvergelijking) De differentiaalvergelijking $y' + \varphi(x)y = \psi(x)$, waarin $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ op een interval gedefinieerde continue functies zijn, heeft als oplossingen $y = e^{-\int \varphi(x)dx} \int \psi(x)e^{\int \varphi(x)dx}dx + Ae^{-\int \varphi(x)dx}$ met willekeurige constante A .

De methode volgens welke we deze vergelijking opgelost hebben, heet de methode van de variatie der constanten. We hebben n.l. eerst de corresponderende homogene vergelijking opgelost. Deze oplossing bevat een willekeurige constante. Vervolgens hebben we voor de algemene vergelijking de oplossing van de homogene vergelijking genomen, waarin de constante door een onbekende functie was vervangen, welke functie we vervolgens hebben bepaald.

We zien, dat de gevonden oplossing de som is van de algemene oplossing van de homogene vergelijking en één bepaalde oplossing van de inhomogene vergelijking. Voor de laatste kunnen we naar willekeur een oplossing van de inhomogene vergelijking nemen. Immers als $y_1(x)$ en $y_2(x)$ oplossingen zijn van de inhomogene vergelijking, is $y_2(x) - y_1(x)$ een oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking zoals bij substitutie direct blijkt. Als we dus één oplossing van de inhomogene vergelijking (een z.g. particuliere oplossing) kennen (deze is met enige handigheid soms wel direct te zien), dan zijn daaruit direct alle oplossingen te vinden door er de algemene oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking bij op te tellen.

Opgave 121. Bepaal de oplossingen van $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $xy' - y = 1 - \log x$, $xy' - 2y = -x$, $y' + (2 - \cotg x) y = 2 \sin x$.

De vergelijking $y' + \varphi(x)y = y^\alpha \psi(x)$, waarin α constant $\neq 1$ is en $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ op een interval gedefinieerde continue functies zijn, is door substitutie op een lineaire vergelijking terug te brengen. Als $y(x)$ een oplossing van deze vergelijking is stellen we $z = y^{1/\beta}$ (β constant $\neq 0$), dus $y = z^\beta$; dan is $y' = \beta z^{\beta-1} z'$, dus $\beta z^{\beta-1} z' + \varphi(x) z^\beta = z^{\alpha\beta} \psi(x)$. In een interval waar $y > 0$, is ook $z > 0$; dan is $z' + \frac{1}{\beta} \varphi(x) z = \frac{1}{\beta} z^{\alpha\beta - \beta + 1} \psi(x)$. Kiezen we nu $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$, dan komt er $z' + (1-\alpha) \varphi(x) z = (1-\alpha) \psi(x)$, hetgeen betekent dat z aan een lineaire vergelijking voldoet. Als omgekeerd z een oplossing $\neq 0$ van de laatste lineaire vergelijking is, is $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ een oplossing van de oorspronkelijke vergelijking. Aan de oorspronkelijke vergelijking voldoet voor $\alpha > 0$ ook $y = 0$.

(16.5) (Vergelijking van Bernoulli) De differentiaalvergelijking $y' + \varphi(x)y = y^\alpha \psi(x)$, waarin $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ op een interval gedefinieerde continue functies zijn en α een constante $\neq 1$ is heeft als oplossingen

≥ 0 de functies $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$, waarin z een oplossing is, > 0 , van $z' + (1-\alpha) \varphi(x) z = (1-\alpha) \psi(x)$, door $y = 0$ voor $\alpha > 0$ en door differentieerbare functies die ontstaan door deze oplossingen aan elkaar te lijmen.

Opgave 122. Bepaal de oplossingen van $xy' - 2y = 2\sqrt{y}x^2$.

We merken nog op, dat als α geheel is, ook oplossingen met $y < 0$ toelaatbaar zijn. Deze worden op analoge wijze behandeld.

Alvorens het volgende type differentiaalvergelijkingen te kunnen behandelen, hebben we eerst een paar hulpstellingen nodig.

(16.6) Als $f(x,y)$ gedefinieerd is in de rechthoek $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$

en als $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaat en continu is, dan geldt $\frac{\partial}{\partial y} \int_a^x f(s,y) ds = \int_a^x \frac{\partial f(s,y)}{\partial y} ds$.

Het bewijs is geheel analoog met het bewijs, dat gegeven is midden op blz. 95 met behulp van stelling (13.2) (blz. 93).

(16.7) Als $\varphi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ continue functies zijn, gedefinieerd in de rechthoek $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, als $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ bestaan en continu zijn en als $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, dan bestaat er een functie $G(x,y)$, gedefinieerd in dezelfde rechthoek, waarvoor geldt $\frac{\partial G}{\partial x} = \varphi$ en $\frac{\partial G}{\partial y} = \psi$.

Bewijs: Stel dat G een dergelijke functie is. Dan is $\frac{\partial G}{\partial x} =$

$$\begin{aligned} &= \varphi(x,y), \text{ maar ook is } \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \varphi(s,y) ds = \varphi(x,y), \text{ dus } G(x,y) = \\ &= \int_a^x \varphi(s,y) ds + h(y). \text{ Verder is } \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x \varphi(s,y) ds = \int_a^x \frac{\partial \varphi(s,y)}{\partial y} ds = \\ &= \int_a^x \frac{\partial \psi(s,y)}{\partial s} ds = \psi(x,y) - \psi(a,y). \text{ Dus } \psi(x,y) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = \psi(x,y) + \\ &+ \psi(a,y) + \frac{dh(y)}{dy}, \text{ dus } \frac{dh}{dy} = \psi(a,y), \text{ dus } h = \int \psi(a,y) dy + A \text{ met constante} \\ &A, \text{ dus } G(x,y) = \int_a^x \varphi(s,y) ds + \int \psi(a,y) dy + A. \end{aligned}$$

Omgekeerd voldoet voor iedere constante A deze functie aan de voorwaarden, zoals direct te verifiëren valt.

De beperking tot functies, die op rechthoeken gedefinieerd zijn, is niet essentieel in stelling (16.7). Ook voor vele anders gevormde gebieden blijft de stelling geldig. Dat dit niet voor alle gebieden het geval is, blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld.

Kies $\varphi(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ en $\psi(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ gedefinieerd voor alle $(x,y) \neq (0,0)$. Dan is $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ (ga dat na). Stel dat er een $G(x,y)$ bestaat, gedefinieerd voor alle $(x,y) \neq (0,0)$, zodat $\frac{\partial G}{\partial x} = \varphi$ en $\frac{\partial G}{\partial y} = \psi$. Voor $x \neq 0$ definiëren we $H(x,y) = G(x,y) - \arctg \frac{y}{x}$, dan is $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$ (ga dat na). Omdat $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, is $H = h(x)$. Omdat $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$ is $H = C_1$ voor $x > 0$ en $H = C_2$ voor $x < 0$ met constanten C_1 en C_2 . Dus $G(x,y) = \arctg \frac{y}{x} + C_1$ voor $x > 0$ en $G(x,y) = \arctg \frac{y}{x} + C_2$ voor $x < 0$. Nu geeft $x \downarrow 0$, dat $G(0,1) = \frac{1}{2}\pi + C_1$ en $x \uparrow 0$, dat $G(0,1) = -\frac{1}{2}\pi + C_2$, dus $C_2 = \pi + C_1$. Verder geeft $x \downarrow 0$, dat $G(0,-1) = -\frac{1}{2}\pi + C_1$ en $x \uparrow 0$, dat $G(0,-1) = \frac{1}{2}\pi + C_2$, dus $C_2 = -\pi + C_1$. Dit is een tegenspraak, dus een functie $G(x,y)$ van de gezochte soort bestaat niet. We zien aan dit voorbeeld ook, waardoor het mis gaat. De functie $\arctg \frac{y}{x}$ geeft n.l. in ieder punt de hoek die de voerstraal van $(0,0)$ naar dat punt maakt met de positieve X -as. Loopt men echter eenmaal om $(0,0)$ heen, dan is deze hoek met 2π toegenomen. In het algemeen gaat alles goed, als er in het gebied geen "gaten" zitten, of, zoals men zegt, het gebied enkelvoudig samenhangend is. We geven de definitie hiervan niet en gaan op deze kwestie niet verder in.

We beschouwen nu de vergelijking $\varphi(x,y) + \psi(x,y)y' = 0$, waarin $\varphi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ functies zijn, die voldoen aan de voorwaarden, die in (16.7) gesteld zijn.

Er bestaat dan, volgens (16.7), een functie $G(x,y)$, zodat $\frac{\partial G}{\partial x} = \varphi$ en $\frac{\partial G}{\partial y} = \psi$. Neem nu een willekeurige op een interval gedefinieerde oplossing $y(x)$ van de vergelijking. Dan geldt voor de functie $h(x) = G(x, y(x))$, dat $\frac{dh}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \varphi + \psi y' = 0$, dus $h(x) = A$ met constante A , dus $G(x, y(x)) = A$. Verder voldoet voor iedere constante A ook een oplossing, bepaald door $G(x,y) = A$, aan de vergelijking. We hebben dus gevonden:

(16.8) (Exacte of totale differentiaalvergelijking) De differentiaalvergelijking $\varphi(x,y) + \psi(x,y)y' = 0$, waarin $\varphi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ continue functies zijn, gedefinieerd in de rechthoek $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, waarvoor $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ en $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ bestaan en continu zijn en waarvoor geldt $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, heeft als oplossingen $G(x,y) = A$ met willekeurige constante A , als $G(x,y)$ een in bovengenoemde rechthoek gedefinieerde functie is, waarvoor geldt $\frac{\partial G}{\partial x} = \varphi$, $\frac{\partial G}{\partial y} = \psi$.

Met behulp van het bewijs van stelling (16.7) is een functie $G(x,y)$, zoals bedoeld in (16.8), te vinden. Het is echter vaak niet nodig, hierbij bepaalde integralen te gebruiken. Als we n.l. een stamfunctie $\int \varphi(x,y)dx$ kunnen vinden, die als functie van y continu differentieerbaar is, dan geldt $\frac{\partial}{\partial x}(G(x,y) - \int \varphi(x,y)dx) = 0$ en $\frac{\partial}{\partial y}(G(x,y) - \int \varphi(x,y)dx) = \psi(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi(x,y)dx$. Dus $G(x,y) - \int \varphi(x,y)dx$ is een functie van y alleen en $G(x,y) - \int \varphi(x,y)dx = \int (\psi(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi(x,y)dx)dy + A$ en in $\int \varphi(x,y)dx + \int (\psi(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi(x,y)dx)dy$ hebben we een functie van de verlangde soort gevonden. In de berekening zit nog een controle op vergissingen, daar $\psi(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi(x,y)dx$ onafhankelijk van x moet blijken te zijn. Nemen we b.v. $\varphi = x^2 + 2xy$, $\psi = x^2 - y^2$, dan kunnen we $\int \varphi dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2y$ kiezen. Dan is $\psi - \frac{\partial}{\partial y} \int \varphi dx = x^2 - y^2 - x^2 = -y^2$ en $G(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y - \frac{1}{3}y^3 + A$.

Opgave 123. Bepaal de oplossingen van $3x^2 + y^4 + (4xy^3 + 2y)y' = 0$, $y \cos x + \log y + (\sin x + \frac{x}{y} - \sin y)y' = 0$.

Als we een differentiaalvergelijking $\varphi(x,y) + \psi(x,y)y' = 0$ hebben, waarvoor niet geldt $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, is de methode van (16.8) niet direct toepasselijk. Dikwijls blijkt het dan mogelijk een z.g. integrerende factor $\mu(x,y)$ te vinden, zodat $\frac{\partial(\mu\varphi)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\psi)}{\partial x}$. De differentiaalvergelijking $\mu\varphi + \mu\psi y' = 0$ is dan met (16.8) te behandelen; oplossingen van deze vergelijking, waarvoor $\mu \neq 0$, zijn blijkbaar ook oplossingen van de gegeven vergelijking. De functie μ voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking $\psi \frac{\partial \mu}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \mu}{\partial y} = (\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x})\mu$, hetgeen in het algemeen een veel moeilijker vergelijking zal zijn dan de gegeven vergelijking. Men hoeft er echter slechts één oplossing $\neq 0$ van te vinden en deze is

met enige handigheid soms wel te zien, b.v. door μ als functie van x alleen of van y alleen te nemen.

Nemen we als voorbeeld $y + x(\log x + \cos y)y' = 0$, dan krijgen we $x(\log x + \cos y) \frac{\partial \mu}{\partial x} - y \frac{\partial \mu}{\partial y} = (1 - \log x - \cos y - 1)\mu$. We zien hieraan direct dat een functie μ van x alleen waarvoor $x \frac{d\mu}{dx} = -1$ geldt, aan de vereisten voldoet, b.v. $\mu = \frac{1}{x}$. De vergelijking $\frac{y}{x} + (\log x + \cos y)y' = 0$ is exact en kan volgens (16.8) behandeld worden.

Opgave 124. Bepaal de oplossingen van $2y + (\sin 2x + 2 \cos^2 x \cos y)y' = 0$ en $x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2})y' = 0$.

We beschouwen nu een differentiaalvergelijking $y = \varphi(x, y')$, waarin $\varphi(x, t)$ een partieel differentieerbare functie van twee veranderlijken is met continue partiële afgeleiden. We schrijven ter afkorting $\varphi_1(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$ en $\varphi_2(x, t) = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}$. Laat $y(x)$ een twee maal differentieerbare oplossing van deze vergelijking zijn met continue tweede afgeleide. Dan geldt $y' = \varphi_1(x, y') + \varphi_2(x, y')y''$. In een interval, waarbinnen $y'' \neq 0$, is $y'(x)$ om te keren tot een functie $x(y')$, waarvoor geldt $(y' - \varphi_1(x, y')) \frac{dx}{dy'} = \varphi_2(x, y')$ en de oplossing is te schrijven in de parameterform $x = x(t)$, $y = \varphi(x(t), t)$, waarin $x(t)$ voldoet aan $(t - \varphi_1(x, t)) \frac{dx}{dt} = \varphi_2(x, t)$. Omgekeerd als $x = \Omega(t)$ een op een interval gedefinieerde oplossing is van de vergelijking $(t - \varphi_1(x, t)) \frac{dx}{dt} = \varphi_2(x, t)$, waarvoor geldt dat $\Omega'(t)$ continu is en $\Omega'(t) \neq 0$ voor alle t , dan is $x = \Omega(t)$, $y = \varphi(\Omega(t), t)$ een twee maal differentieerbare oplossing met continue tweede afgeleide van de gegeven vergelijking. Immers er geldt $(t - \varphi_1(\Omega(t), t))\Omega'(t) = \varphi_2(\Omega(t), t)$, $\frac{dx}{dt} = \Omega'(t)$ en $\frac{dy}{dt} = \varphi_1(\Omega(t), t)\Omega'(t) + \varphi_2(\Omega(t), t) = t\Omega'(t)$, dus $\frac{dy}{dx} = t$, dus $y = \varphi(x, y')$. Verder is $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\Omega'(t)}$ continu. In een interval, waar $y'' = 0$, geldt $y = Ax + B$ met constante A en B en $y' = A$. Dit voldoet aan de gegeven vergelijking als $Ax + B = \varphi(x, A)$. Hiermee hebben we het volgende gevonden.

(16.9) De differentiaalvergelijking $y = \varphi(x, y')$, waarin $\varphi(x, t)$ een partieel differentieerbare functie van twee veranderlijken is met continue partiële afgeleiden, heeft als twee maal differentieerbare oplossingen met continue tweede afgeleide de functies bepaald door de parameteraanpak $x = \Omega(t)$, $y = \varphi(\Omega(t), t)$, waarin $x = \Omega(t)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $(t - \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}) \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}$, waarvoor geldt dat $\Omega'(t)$ continu is en $\Omega'(t) \neq 0$ voor alle t , verder voor iedere A , waar een B en een interval I bij te vinden is, zodat voor alle x in I geldt $\varphi(x, A) = Ax + B$, de oplossing $y = Ax + B$ voor x in I en ten slotte alle twee maal differentieerbare functies met continue tweede afgeleide, die ontstaan door deze functies aan elkaar te lijmen.

We merken nog op, dat in (16.9) uitsluitend sprake is van twee maal differentieerbare oplossingen, hoewel de gegeven differentiaalvergelijking slechts van de eerste orde is, zodat oplossingen slechts één maal differentieerbaar behoeven te zijn. Het is dus in principe mogelijk, dat er oplossingen van de gegeven differentiaalvergelijking buiten beschouwing gelaten zijn. We gaan op deze kwestie niet verder in.

Verder merken we op, dat in (16.9) kort gezegd de oplossing van een differentiaalvergelijking teruggebracht wordt op de oplossing van een andere differentiaalvergelijking. A priori valt er echter in het geheel niets over te zeggen in hoeverre de nieuwe vergelijking eenvoudiger op te lossen is dan de oude. Deze situatie is analoog met b.v. partiële integratie in de integraalrekening. Deze laatste brengt het zoeken van een stamfunctie terug op het zoeken van een andere stamfunctie. Of dit procédé succes oplevert, hangt van de omstandigheden af.

Een geval, waarin (16.9) succes oplevert, ontstaat als $\varphi(x, y')$ een lineaire functie van x is, dus bij de vergelijking $y = \chi(y')x + \psi(y')$, met continu differentieerbare χ en ψ . We moeten dan beschouwen $(t - \chi(t))\frac{dx}{dt} = \chi'(t)x + \psi'(t)$. Op een interval voor t , waar $\chi(t) \neq t$, geeft dit een lineaire differentiaalvergelijking, die we kunnen oplossen, en die op de in (16.9) aangegeven wijze tot oplossingen van de gegeven vergelijking leidt. In een interval voor t , waar $\chi(t) = t$, dus $\chi'(t) = 1$, komt er $0 = x + \psi'(t)$. Als $\psi(t)$ twee maal differentieerbaar is en $\psi''(t) \neq 0$ geeft dit de oplossing $x = -\psi'(t)$, $y = -t\psi'(t) + \psi(t)$. Verder moeten we nog de waarden van A bepalen, waarvoor $\chi(A)x + \psi(A) = Ax + B$ met constante B in een zeker interval voor x . Dit zijn blijkbaar die waarden van A waarvoor $\chi(A) = A$; dan is $B = \psi(A)$ en x aan geen enkele beperking onderhevig. Voor een dergelijke A is $y = Ax + \psi(A)$ ook een oplossing. Verder zijn er uit deze gevormde aan elkaar gelijkde oplossingen.

Een speciaal geval van de in de vorige alinea behandelde vergelijking is de vergelijking $y = xy' + \psi(y')$ (differentiaalvergelijking van Clairaut). Op grond van het bovenstaande heeft deze oplossingen $y = Ax + \psi(A)$ voor iedere constante A , waarvoor $\psi(A)$ gedefinieerd is en verder $x = -\psi'(t)$, $y = -t\psi'(t) + \psi(t)$ (mits $\psi''(t)$ bestaat en $\neq 0$ is) en hieruit gevormde aan elkaar gelijkde oplossingen. Aan deze vergelijking zien we een mooi voorbeeld van een z.g. singuliere oplossing. Naast een stelsel oplossingen waarin een willekeurige constante voorkomt is er nog een oplossing, die een singuliere oplossing genoemd wordt. Van de kromme, die door de singuliere oplossing bepaald wordt vormen de andere oplossingen juist de raaklijnen.

Opgave 125. Bewijs dat de raaklijnen van de kromme, bepaald door de singuliere oplossing van een differentiaalvergelijking van Clairaut, juist de andere hierboven genoemde oplossingen geven.

Opgave 126. Bepaal de oplossingen van $y = (x-1)(y'-1-e^{-y'})$, $y = y'x + -\frac{1}{2}(y')^2$, $y = (y' - 1)(e^x - 1) + x$.

Tot slot geven we nog enige gemengde opgaven.

Opgave 127. Bepaal de oplossingen van $yy' - \frac{1}{2}y^2 = \cos x$, $(x+y)^2 y' = 1$, $\sin x - x \cos x - 3x^2(y-x)^2 + 3x^2(y-x)^2 y' = 0$, $x^2 y' = e^x - 2xy$.

Einde van de cursus.